УДК 539.3 https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2021-6(16)-03

ВПЛИВ ТЕРМОЧУТЛИВОСТІ МАТЕРІАЛУ ШАРІВ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН БАГАТОШАРОВИХ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН

INFLUENCE OF HEAT SENSITIVITY OF LAYER MATERIAL ON STRESSED AND DEFORMED STATE OF MULTILAYER SHELLS AND PLATES

Бондарський О.Г., к.т.н., доц., (Луцький національний технічний університет), Бабков О.В. к.т.н., доц. (Національна академія образотворчого мистецтва і архітектури)

Bondarskyy O.G. PhD in Engineering, associate professor (Lutsk National Technical University), Babkov O.V. PhD in Engineering, associate professor (National Academy of Fine Arts and Architecture)

Уточнюються функції розподілу поперечних дотичних напружень при врахуванні залежності фізико-механічних властивостей матеріалу шарів від температури.

Composite polymeric materials are widely used in modern technology. They are characterized by anisotropy of properties and a significant dependence of their thermomechanical characteristics on temperature. For multilayer shells, combining in a single package such heterogeneous materials as metals, foams, fiberglass, is characterized by, in addition, low shear stiffness. When developing a method for calculating thin-walled layered structures under thermal force, these features can be taken into account by using a finite-shear model of shell theory in the assumption of an arbitrary law of change of thermomechanical characteristics from temperature. Within the framework of the unbound quasi-static theory of thermoelasticity, a multilayer orthotropic shell of rotation which is under the influence of temperature and static loading is considered. The purpose of this article is to clarify the distribution functions of the transverse tangential stresses, taking into account the dependence of the physical-mechanical and thermo-physical properties of the material of the layers on the temperature, the values of which are set or calculated. It is established that to calculate the stress-strain state of thick shells with significant shear flexibility of the package and in the presence of intensive heat dissipation from the end surfaces, a quadratic temperature approximation within each layer should be used. For shells of medium thickness and thin, as well as thick but homogeneous, the calculation can be done with a piecewise linear law of temperature distribution. Next, the functions of distribution of transverse tangential stresses are obtained, which allow to build a more accurate model of the stress-strain state of multilayer shells.

Ключові слова: багатошарові оболонки і пластини, термочутливість, кінцево-зсувна модель теорії оболонок .

Keywords: multilayer shells and plates, thermal sensitivity, finite-displacement model of shell theory.

Вступ. Композитні полімерні і інші сучасні матеріали широко застосовуються в різних галузях техніки. Тому розвиток теорій розрахунку пластин і оболонок, які виготовлені із таких матеріалів, є важливою задачею.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Постановка проблеми. Характерними особливостями композитних матеріалів є анізотропія властивостей та істотна залежність їх термомеханічних характеристик від температури нагріву. Численні експериментальні дані свідчать, що при нагріві до 200 °С міцність і модулі пружності конструкційних пластмас із тканим наповнювачем зменшуються в середньому в 2,5 рази, а з трикотажним – у 8-10 разів, при цьому коефіцієнти лінійного розширення α_i для різних матеріалів можуть як зростати, так і зменшуватися, коефіцієнти Пуассона ϑ_{ij} від температури мало залежать.

Для багатошарових оболонок, що об'єднують в єдиний пакет такі різнорідні за своїми властивостями матеріали, як метали, пінопласти, склопластики, характерна, крім того, низька зсувна жорсткість, що посилюється тим, що при нагріві модуль зсуву композитів зменшується значніше, ніж модуль Юнга [1]. При розробці методики розрахунку тонкостінних шаруватих конструкцій за термосилового навантаження вказані особливості можуть бути враховані шляхом використання кінцево-зсувної моделі теорії оболонок [2] у припущенні довільного закону зміни термомеханічних характеристик від температури [3].

Розглянемо у рамках незв'язаної квазістатичної теорії термопружності багатошарову ортотропну оболонку обертання, що складається з m шарів, віднесену до ортогональної системи координат x_1, x_2, x_3=z. Координата x_1 спрямована уздовж меридіана, x_2 – в окружному напрямку, z – по зовнішній нормалі до координатної поверхні. Оболонка перебуває під впливом температури T(x_1, x_2,z) і статичного навантаження $q^{\pm}$=(x_1, x_2), прикладеного відповідно до зовнішньої (z=h_{m+1}) і внутрішньої (z=h_1) поверхонь. Матеріал шарів ортотропний, його модулі пружності E_i^k і G_{ij}^k, коефіцієнти Пуассона ϑ_{ij}^k, температурного розширення α_i^k, теплопровідності λ_i^k і тепловіддачі a_i^k є довільними функціями температури:

$$E_i^k = E_i^k(T); \quad G_{ij}^k = G_{ij}^k(T); \quad \vartheta_{ij}^k = \vartheta_{ij}^k(T); \quad \alpha_i^k = \alpha_i^k\,(\mathrm{T});$$

$$\lambda_i^k = \lambda_i^k(\mathrm{T}); \quad a_i^k = a_i^k(\mathrm{T}); \quad i, j = 1, 2, 3; \quad \mathrm{T} = \mathrm{T}(x_1, x_2, z)$$

Мета цієї статті полягає в уточненні функцій f_i розподілу поперечних дотичних напружень σ_{i3} при врахуванні залежності фізико-механічних (ФМВ) і тепло-фізичних (ТФВ) властивостей матеріалу шарів від температури T = T(x_1, x_2, z), значення якої задаються або розраховуються згідно з [4] .

Основна частина. Із співвідношень у роботі [4], при квадратичній апроксимації функцій розподілення і допущенні про незалежність ФМВ і ТФВ від температури, отримана система трьох диференціальних рівнянь у частинних похідних відносно функцій T_0, T_1, T_2. Там же встановлений вплив ФМВ на розподіл стаціонарного температурного поля за об'ємом складних конструкцій. Так, для розрахунку НДС товстих оболонок R/H<7, із значною зсувною податливістю пакету та за наявності інтенсивного тепловідводу з торцевих поверхонь, слід використати квадратичну апроксимацію. Для оболонок середньої товщини і тонких, а також товстих, але однорідних, розрахунок може робитися при кусочно-лінійному законі розподілу температури.

Вважаючи, що торці оболонки мають ідеальну теплоізоляцію, градієнти температури в меридіональному напрямі незначні, розподілення температури по товщині може бути визначено так:

$$T(z) = T_0 + T_1\,\rho(z), \tag{1}$$

де: $\rho = \lambda^* \int_0^z \lambda^{-1}(z)dz$; $\lambda^* = H^{-2}\int_{h_1}^{h_{m+1}} \lambda(z)dz$.

Тут ρ – функція розподілу температури по товщині пакету шарів, що задається і задовольняє умовам контакту між шарами; λ^* – усереднена теплопровідність; T_0, T_1 – невідомі функції, що характеризують температуру на рівні поверхні приведення. Для їх визначення використовуються два алгебраїчні рівняння:

$$T_0 + b(h_1)T_1 = T(h_1); \quad \text{та} \quad T_0 + b(h_{m+1})T_1 = T(h_{m+1}), \tag{2}$$

сенс яких – задоволення умовам на лицьових поверхнях. У разі конвективного теплообміну з довкіллям, граничі умови запишуться таким чином:

$$\begin{aligned} -\lambda_z T_{,z} + a^-(T - \theta^-) &= 0; \quad \text{коли } z = h_1, \\ \lambda_z T_{,z} + a^+(T - \theta^+) &= 0; \quad \text{коли } z = h_{m+1}; \end{aligned} \tag{3}$$

де a^- , a^+– коефіцієнти тепловіддачі на внутрішній і зовнішній поверхнях оболонки відповідно.

Тоді коефіцієнти рівнянь (2) визначаться виразами

$$\begin{aligned} b(h_1) &= \rho(h_1) - \lambda^*/a^-; \quad & T(h_1) &= \theta^-; \\ b(h_{m+1}) &= \rho(h_{m+1}) - \lambda^*/a^+; \quad & T(h_{m+1}) &= \theta^+, \end{aligned} \tag{4}$$

отриманими із підстановки (1) в рівняння (3).

У разі граничних умов першого роду, якщо задана температура зовнішніх поверхонь оболонки $T(h_1) = T^-$ і $T(h_{m+1}) = T^+$, коефіцієнти визначаються безпосередньо із гіпотези (1)

$$b(h_1) = \rho(h_1); \qquad T(h_1) = T^- ;$$
$$b(h_{m+1}) = \rho(h_{m+1}); \quad T(h_{m+1}) = T^+. \tag{5}$$

за припущенням про кусково-лінійний закон розподілу за товщиною.

Для зведення тривимірних рівнянь теорії пружності

$$(A_2\sigma_{11})_{,1} - \sigma_{22}A_{2,1} + \sigma_{12}A_{1,2} + (A_1\sigma_{12})_{,2} + A_1^{-1}(A_1^2A_2\sigma_{13})_{,3} = 0;$$
$$(A_1\sigma_{12})_{,2} - \sigma_{11}A_{1,2} + \sigma_{12}A_{2,1} + (A_2\sigma_{12})_{,1} + A_2^{-1}(A_2^2A_1\sigma_{23})_{,3} = 0; \tag{6}$$
$$(A_1A_2\sigma_{33})_{,3} - A_1A_2(\sigma_{11}k_1 + \sigma_{22}k_2) + (A_2\sigma_{13})_{,1} + (A_1\sigma_{23})_{,2} = 0,$$

до двовимірних прийнято уточнений варіант кінцево-зсувної теорії [2], заснований на єдиних статичних

$$\sigma_{i3}(T) = G_{i3}(T)\, f_{i,3}(T)\varphi_i(x_1, x_2); \quad \sigma_{33} = 0; \quad i = 1,2, \tag{7}$$

і кінематичній w=$u_3(x_1, x_2)$ гіпотезах для усього багатошарового пакету в цілому. Узагальненням прийнятої теорії є врахування залежності функцій розподілу поперечних дотичних напружень від температури. Тут ϕ_i – функції зсуву, що треба знайти, $f_{i,3}$ – функції, що задають нелінійний (кубічний) розподіл поперечних дотичних напружень по товщині пакету шарів. На їх визначенні і зупинимося.

З перших двох рівнянь системи (6), використовуючи співвідношення:

$$\sigma_{ii}^k = B_{ii}^k(k_1 w + z\chi_{ii}) + B_{ij}^k(k_2 w + z\chi_{jj}); \;\; \sigma_{ij}^k = 2G_{ij}^k z\chi_{ij}; \tag{8}$$
$$B_{ii}^k = E_{ii}^k/(1 - \nu_{ij}^k \nu_{ji}^k); \quad B_{ij}^k = \nu_{ji}^k B_{ii.}^k; \quad i.j = 1,2; \quad i \neq j,$$

і припущення, прийняті в теорії пологих оболонок про те, що $|f_{,ij}| >> |f|$ і тим більше $|w_{,ij}| >> |k_i w|$, отримуємо для k-го шару:

$$\sigma_{i3,3}^k = -(A_1A_2)^{-1} z\{[B_{ii}^k A_j(\chi_{ii} + \nu_{ij}^k \chi_{jj})]_{,i} + \sigma^*\}. \tag{9}$$

де $\sigma^* = -A_{j,i}B_{ii}^k(\chi_{jj} + \nu_{ij}^k\chi_{ii}) + 2G_{12}^k[A_{i,j}\chi_{ij} + (A_i\chi_{ij})_{,j}].$ (10)

Оскільки параметри B_{ii} залежать від температури, а отже, і від координат, вираз (9) набуває виду:

$$\sigma_{i3,3}^k = -(A_1A_2)^{-1} z\{[B_{ii,i}^k A_j(\chi_{ii} + \nu_{ij}^k\chi_{jj})]$$
$$+[B_{ii}^k A_j(\chi_{ii} + \nu_{ij}^k\chi_{jj})]_{,i} + \sigma^*\}. \tag{11}$$

Враховуючи ортотропію матеріалу шарів $B_{ij}^k = \nu_{ji}^k B_{ii.}^k$ і замінюючи χ_{11} і χ_{22} їх середнім значенням $\chi_{cp} = (\chi_{11} + \chi_{22})/2$, отримаємо:

$$\sigma_{i3,3}^k = -\frac{1}{2}(A_1 A_2)^{-1} z\{B_{ii} A_j (\chi_{ii} + \chi_{jj})_{,i} [1 + \nu_{ij} + 2G_{12} B_{ii}^{-1}]$$

$$+ B_{ii,i} A_j (\chi_{ii} + \chi_{jj})(1 + \nu_{ij}) + \sigma^{**}, \qquad (12)$$

де $\sigma^{**} = A_{j,i}(\chi_{ii} + \chi_{jj})\{(B_{ii} - B_{jj})(1 + \nu_{ij} + 2G_{12} B_{ii}^{-1})\}. \qquad (13)$

Для ізотропного матеріалу, коли $B_{ii} = B_{jj}$, а також при незначній ортотропії будемо вважати, що напруження (13) досить мале, тому ним можна знехтувати, як це робилося у [2]. Тоді вираз (12) перепишемо у вигляді:

$$\sigma_{i3,3}^k = -\frac{z}{2} A_i^{-1}\{(1 + \nu_{ij})[(B_{ii} + 2G_{12})\ (\chi_{ii} + \chi_{jj})_{,i} + B_{ii,i}\ (\chi_{ii} + \chi_{jj})]\} \qquad (14)$$

Інтегруючи ці співвідношення по z, отримаємо:

$$\sigma_{i3} = -A_i^{-1}\{\ (\chi_{ii} + \chi_{jj})_{,i} \int_{h_1}^{z} A_{ii}(z) z dz \text{ - } (\chi_{ii} + \chi_{jj}) \int_{h_1}^{z} A_{ii}^*(z) z dz\}, \qquad (15)$$

де $A_{ii} = \frac{1}{2} B_{ii}(1 + \nu_{ij}) + G_{12}; \qquad A^*_{ii} = \frac{1}{2} B_{ii,i}(1 + \nu_{ij}).$

Далі, як це робилося в [2], функції f_i розподілу поперечних дотичних напружень запишемо у виді:

$$f_i(z) = \int_0^z G_{i3}^{-1}(z) \left[\int_{h_1}^{z} A_{ii}(z)(\delta_i - z) dz \right] dz + f_i^*, \qquad (16)$$

де

$$f_i^*(z) = K_i \int_0^z G_{i3}^{-1}(z) \left[\int_{h_1}^{z} A_{ii}^*(z)(\delta_i^* - z) dz \right] dz; \qquad K_i(x_1, x_2) = \chi_{ii} A_{ii}^{-1} \varphi_i$$

Сталі коефіцієнти δ_i і δ_i^* знаходимо із умови рівності нулю поперечних дотичних напружень на поверхні оболонки $z = h_{m+1}$ за формулами:

$$\delta_i = \int_{h_1}^{h_{m+1}} A_{ii}(z) z dz \ / \int_{h_1}^{h_{m+1}} A_{ii}(z) dz;$$

$$\delta_i^* = \int_{h_1}^{h_{m+1}} A_{ii}^*(z) z dz / \int_{h_1}^{h_{m+1}} A_{ii}^*(z) dz.$$

Інтегруючи ці співвідношення по z, отримаємо:

$$f_i = (F_{ik}^{(3)} + \widetilde{F}_{ik}^{(3)})z^3 + (F_{ik}^{(2)} + \widetilde{F}_{ik}^{(2)})z^2 + (F_{ik}^{(1)} + \widetilde{F}_{ik}^{(1)})z + (F_{ik}^{(0)} + \widetilde{F}_{ik}^{(0)}).$$

Коефіцієнти поліному третього ступеня залежать від номера шару k

$$F_{ik}^{(3)} = A_{ii}^k/(6G_{i3}^k); \qquad F_{ik}^{(2)} = -\delta_i A_{ii}^k/(2G_{i3}^k);$$

$$F_{ik}^{(1)} = -A_{ii}^k/G_{i3}^k(h_k^2/2 - \delta_i h_k) + \sum_i^{(2)k} - \delta_i \sum_i^{(1)k};$$

$$F_{ik}^{(0)} = -F_{ik}^{(3)} h_k^3 - F_{ik}^{(2)} h_k^2 - F_{ik}^{(1)} h_k$$

$$+\sum_i^{(3)k} - F_{is}^{(3)} h_s^3 - F_{is}^{(2)} h_s^2 - F_{is}^{(1)} h_s + \sum_i^{(3)s},$$

де $\sum_i^{(n)k} = \sum_{i=1}^{k+1} A_{ii}^{i-1}(h_{i+1}^n - h_i^n)/n, \quad n=1, 2;$

$$\sum_i^{(3)k} = \sum_{i=1}^{h=1}[F_{ij}^{(3)}(h_{j+1}^3 - h_j^3) - F_{ij}^{(2)}(h_{j+1}^2 - h_j^2) - F_{ij}^{(1)}(h_{j+1} - h_j)],$$

s – номер шару, в якому знаходиться координатна поверхня z=0.

Коефіцієнти $\widetilde{F}_{ik}^{(n)}$ мають такий же вигляд, як $F_{ik}^{(n)}$, але замість A і δ слід підставляти A^* і δ^*, а також помножувати всі коефіцієнти на K_i.

Таким чином, модель, яка була побудована в [2], буде точнішою за рахунок нового розподілу поперечних дотичних напружень.

References

1. Elpatievsky A.N., Vasiliev V.V. Strength of cylindrical shells made of reinforced materials. - M .: Машиностроение, 1972. - 168 с.

2. Rasskazov A.O., Sokolovskaya I.I., Shulga N.A. Theory and calculation of layered orthotropic plates and shells. Kiev: Higher school. 1986. - 191 p.

3. Bondarsky O.G., Babkov O.V., Kosenko V.I. Methods for numerical solution of boundary value problems of statics of multilayer structure systems. // Interuniversity collection "Scientific notes". - Issue №33. - 2011. - P. 50–52.

4. Rasskazov O.O., Bondarsky O.G. Investigation of the influence of elastic characteristics of the layer material on the parameters of the thermoelastic state of the composite shell. // Bulletin of the National Transport University. K., - 2003. –_Issue 8. - P. 423-428.

Список використаних джерел

1. Елпатьевский А.Н., Васильев В.В. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов. – М.: Машиностроение, 1972. – 168 с.

2. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. Киев: Высшая школа. 1986. – 191 с.

3. Бондарський О.Г, Бабков О.В., Косенко В.І. Методика чисельного розв’язання крайових задач статики систем багатошарової структури. // Міжвузівський збірник "Наукові нотатки". – Випуск №33. – 2011. – С. 50–52.

4. Рассказов О.О., Бондарський О.Г. Дослідження впливу пружних характеристик матеріалу шарів на параметри термопружного стану складеної оболонки. // Вісник національного транспортного університету. К., – 2003. – Випуск 8. – С. 423-428.