УДК 539.3 **DOI:10.36910/6775-2410-6208-2020-4(14)-18**

ВПЛИВ ДЕФОРМАЦІЙ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ ТА ОБТИСНЕННЯ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ДЛЯ КРИВИХ СТРИЖНІВ

INFLUENCE OF TRANSVERSE SHIFT AND COMPRESSION ON THE VALUE OF CRITICAL LOAD FOR CURVED RODS

Шваб'юк В.І., д.т.н., проф., Ротко С.В., к.т.н., доц., Маткова А.В., к.т.н., доц., Швабюк В.В., к.т.н., доц. (Луцький національний технічний університет)

Shvabyuk V.I., Doctor of Engineering, Professor, Rotko S.V., Ph.D. in Engineering, Associate Professor, Matkova A.V., Ph.D. in Engineering, Associate Professor, Shvabyuk V.V., Ph.D. in Engineering, Associate Professor (Lutsk National Technical University)

Досліджуються уточнені розрахункові формули для визначення критичного навантаження для стрижнів із криволінійною віссю, котрі враховують вплив деформацій поперечного зсуву та обтиснення. Наводиться аналіз цих ефектів для випадків, коли на кільце із композитного матеріалу діє радіальний тиск і воно втрачає свою кругову форму. Одержані результати близькі (а в деяких випадках і співпадають) до отриманих на основі рівнянь плоскої задачі теорії пружності, коли поперечний модуль пружності прямує до нескінченності.

The refined calculation formulae for determining the critical load for curved axis rods, which take into account the influence of transverse shear and compression deformations, are investigated. An analysis of these effects is given for cases when the ring of composite material is subjected to radial pressure and it loses its circular shape. It is known that composite materials have anisotropic properties by nature, and their strength and rigidity characteristics can differ significantly. Therefore, the calculation of elements from such materials requires more accurate models and calculation equations, as well as the use of more advanced mathematical methods. In contrast to the calculated equations, where the previous authors considered the transverse displacement only partially and the transverse compression was neglected, in this paper the transverse compression is accounted to the fourth exponent of the transverse coordinate, and the transverse displacement - to the third. Therefore, the calculated equations are more accurate, the results of the obtained calculations also have the corresponding accuracy.To convert the system of differential bending equations into differential *equations for critical load calculation, the known substitutions used by H.S. Golovin and V.V. Bolotin for similar tasks were used. The numerical result obtained for the composite material ring is approximately 20% lower compared to the similar result if the ring material was isotropic. Calculations have shown that the effect of transverse compression deformation for a ring with a relative thickness h/R=0,1 is insignificant - within 1-2 %%, depending on the ratio of elasticity modulus. The acquired results are close to those obtained on the basis of plane elasticity theory problem, when the transverse modulus of elasticity approximates infinity.*

Ключові слова: критичне навантаження, криволінійні стрижні, кільце, деформації поперечного зсуву та обтиснення, рівняння рівноваги.

Keywords: critical load, curvilinear rods, ring, transverse shear and compression deformations, equilibrium equation.

Вступ. При будівництві великої кількості інженерних споруд у якості утримувальних елементів часто використовуються кільцеві та аркові конструкції. Розрахунок таких елементів необхідно проводити не тільки на міцність і жорсткість, а й на стійкість, що є складною проблемою механіки деформівного твердого тіла та будівельної механіки. Проблема визначення критичного навантаження стає особливо актуальною у даний час, коли для виробництва елементів конструкцій почали використовуватися композитні матеріали. Дані матеріали, за своєю природою, мають анізотропні властивості, тому їх розрахунок вимагає точніших моделей та розрахункових рівнянь, а також застосування досконаліших математичних методів. Такими методами можуть бути як методи теорії пружності для анізотропного матеріалу, так і прикладні методи, побудовані на системі різноманітних гіпотез розподілу за товщиною напружень та деформацій.

Аналіз останніх досліджень, постановка мети і задач досліджень. Дослідженню стійкості кривих стрижнів і кілець під дією рівномірного нормального навантаження присвячена низка робіт С.П.Тимошенка, С.Г. Лєхніцького та ін. [1-3]. Згадані автори для отримання своїх результатів використовують диференціальні рівняння рівноваги зігнутої осі стрижня, де справедливі гіпотези класичної теорії згину тонких стрижнів із урахуванням дії тільки згинальних моментів. Разом з тим, у цих розрахунках розглядувані елементи конструкцій вважалися ізотропними, а товщина їх під дією навантаження залишалася незмінною уздовж довжини елемента. Формули для критичного навантаження, що були отримані цими авторами, є достатньо простими як для підрахунків, так і для якісного аналізу. Одночасно, для випадків композитних елементів вони можуть стати хибними і непридатними до використання.

Найбільш поширеними, на сьогоднішній час, є гіпотези прикладних теорій типу С.Тимошенка – гіпотези лінійного розподілу за товщиною напружень та деформацій, де у результаті таких допущень вирази для переміщень кільця або арки трансформуються до вигляду:

$$V(\varphi, z) = v(\varphi) + z \cdot \gamma_{\varphi}; \quad W = w(\varphi). \tag{1}$$

Тут $\gamma_{\varphi} = \frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h} \frac{Vz}{h} dz -$ невідомий узагальнений кут повороту нормального перерізу елемента стрижня в площині φ, z, $w(\varphi) -$ радіальне переміщення середньої лінії елемента кільця або арки, а *2h* — висота їх перерізів. Перехід до класичної теорії здійснюється заміною величини $\gamma_{\varphi} = \frac{v}{R} - \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \varphi}$.

Основними недоліками теорій типу С.Тимошенка є неврахування зміни товщини поперечного перерізу (поперечного обтиснення) при згині, а також неврахування деформації поперечного зсуву (поперечної сили) при визначенні нормальних напружень σ_{φ}. Дотичні напруження $\tau_{\varphi z}$ у цій моделі вважаються сталими, тому при визначенні кривини $w''(\varphi)$ вводиться безрозмірний коефіцієнт k', який залежить тільки від геометричної форми перерізу.

Для усунення більшості із цих недоліків С.А. Амбарцумян [4], Ю.М. Тарнопольский і А.В. Розе [5] та інші [6] у своїх монографіях запропонували нелінійний закон зміни переміщення $V(\varphi, z)$ за товщиною перерізу:

$$V(\varphi, z) = v(\varphi) + z \cdot \gamma_{\varphi} + \frac{3z}{4h}\left(\frac{1}{5} - \frac{z^2}{3h^2}\right) \cdot \frac{Q_{\varphi}}{G'}, \tag{2}$$

де $Q_{\varphi}, G' -$ поперечна сила та модуль зсуву у поперечному перерізі стрижня; $w(\varphi)$ — переміщення середньої лінії стрижня.

Разом із тим, у запропонованій моделі надалі не враховується поперечне обтиснення, тобто вертикальне переміщення $W = w(\varphi)$ залишається сталим по товщині.

Побудова уточненої моделі деформації композитного кільця

Для усунення названих недоліків попередніх моделей стрижнів авторами [7] було запропоновано уточнений нелінійний розподіл за товщиною тангенціального переміщення $V(\varphi, z)$ кільця (рис.1) із урахуванням поперечного обтиснення у виразі для радіального переміщення $W(\varphi, z)$ від дії поверхневого навантаження (нормального і дотичного):

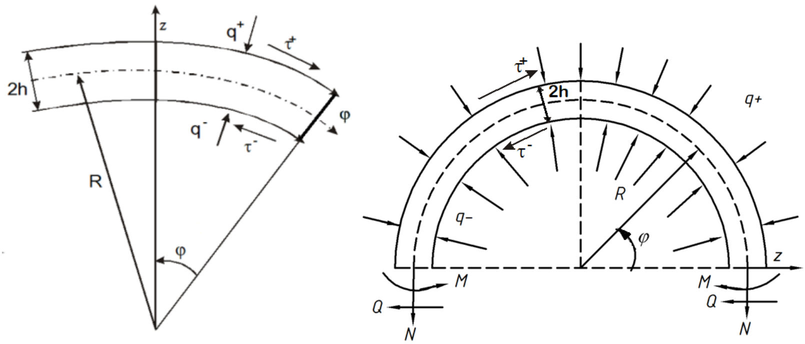

Рис. 1. Схема навантаження елементів кільця

$$V(\varphi, z) = v(1+\frac{z}{R}) - \frac{z}{R}\cdot\frac{dw}{d\varphi} + \frac{z}{3}\left(3+\frac{z}{R}-\frac{z^2}{h^2}-\frac{h^2}{R^2}\right)\frac{Q(\varphi)}{K_\varphi}+$$

$$+\frac{\tau_1}{2tG'}\left(2+\frac{z}{R}-\frac{h^2}{R^2}\right)\cdot z + \frac{\tau_2}{2tG'}\left(\frac{z}{h}+\frac{h}{R}\right)\cdot z; \qquad (3)$$

$$W(\varphi,z)=w(\varphi)-\frac{q}{2tE'}z-\frac{3}{8}\frac{q}{tE'}\left(\frac{z^2}{h}-\frac{z^4}{6h^3}\right)-$$

$$-\frac{\mu''}{R}\frac{dv}{d\varphi}\left(z+\frac{z^2}{2R}\right)+\frac{\mu''}{2R^2}\frac{d^2w}{d\varphi^2}z^2,$$

де $K_{\varphi}=\frac{4}{3}G'th,\ \tilde{w}=w+\frac{3}{8}\frac{qh}{tE'}+\frac{\mu''h^2}{2R^2}\frac{d^2w}{d\varphi^2};\ v,w-$ переміщення середньої лінії кільця у напрямі осей φ та z; $E',G',\mu''-$ модулі пружності та коефіцієнт Пуассона у поперечному напрямі перерізу кільця; *t* – ширина поперечного перерізу кільця.

Невідомі складові переміщень (3): $v(\varphi)$, $w(\varphi)$ і $\tilde{w}_{\tau}(\varphi)$ знаходяться із трьох рівнянь рівноваги, одержаних шляхом інтегрування відповідних рівнянь рівноваги [4] у напруженнях, за умови сталого радіального навантаження на кільце ($q^-=0;\ q^+=q=const$) та поверхневого дотичного $\tau_i(\varphi)$, зводяться до вигляду:

$$\begin{aligned}&\frac{dN}{d\varphi}+Q=-2R\frac{\tau_2}{t}-2h\frac{\tau_1}{t};\\&\frac{dM}{d\varphi}-QR=-2Rh\frac{\tau_1}{t}-2h^2\frac{\tau_2}{t};\\&\frac{dQ}{d\varphi}-N=-q\frac{R}{t}(1+\frac{h}{R}),\end{aligned}\qquad(4)$$

де $N=t\int_{-h}^{h}\sigma_{\varphi}dz$ – поздовжня сила, $Q=t\int_{-h}^{h}\tau_{z\varphi}dz$ – поперечна сила, $M=t\int_{-h}^{h}z\sigma_{\varphi}dz$ – згинальний момент, які діють в поперечних перерізах кільця, шириною t; $\tau_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\tau^{+}\pm\tau^{-}\right)$.

Система рівнянь (4), за умови сталого радіального навантаження на кільце ($\tau_i=0$), може бути зведена до наступного вигляду:

$$\frac{d^2N}{d\varphi^2}+N=q_zR;\quad \frac{d^2Q}{d\varphi^2}+Q=0;\quad \frac{d^2M}{d\varphi^2}-RN=-q_zR^2, \quad (5)$$

де $q_z=-q(1+h/R)$.

Розв'язком першого диференціального рівняння буде:

$$N(\varphi)=A\cos\varphi+B\sin\varphi+q_zR, \quad (6)$$

де A,B – константи, котрі знаходяться із граничних умов. Для осесиметричного навантаження коефіцієнти $A=B=0$. Тоді кільцева сила $N=-q(1+h/R)$. Використавши рівняння системи (4), у якому $Q=-\dfrac{dN}{d\varphi}$, одержимо $Q=0$. Розв'язок другого рівняння системи (4), із врахуванням попередніх результатів, приводить до залежності $M=C,$ де C – стала, що знаходиться із граничних умов для конкретної задачі.

Якщо ж систему диференціальних рівнянь (4) записати через невідомі величини $v(\varphi)$, $w(\varphi)$ і $\tilde{w}_\tau(\varphi)$, то можна перейти до визначення названих вище невідомих складових переміщень, користуючись рівняннями такого вигляду:

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2}+w=-\frac{MR^2}{E_\varphi I'}+\frac{6}{5}\frac{R}{G'}\left(\frac{N}{A}+\frac{q}{2t}\frac{R}{h}\right)\cdot\left(1-0,7\frac{h^2}{R^2}\right)-$$

$$-\frac{q}{2tE'}\left(1-\frac{6}{5}\frac{E'}{G'}\right)\cdot R-\frac{1}{5}\left(\frac{\tau_1'}{tG'}+\frac{\tau_2'}{tG'}\cdot\frac{h}{R}\right)\cdot R; \quad (7)$$

$$\frac{1}{R}\frac{d\tilde{w}_\tau}{d\varphi}=\frac{Q(\varphi)}{K_\varphi}-\frac{3}{2}\left(\frac{\tau_1}{tG'}+\frac{\tau_2}{tG'}\frac{h}{3R}\right).$$

Тут $I'=\int\limits_A \dfrac{R}{R+z}z^2dA\approx I\left(1+\dfrac{3h^2}{5R^2}+\dfrac{3h^4}{7R^4}+...\right)$; $I=2th^3/3$; τ_1',τ_2' – перші похідні за φ; $A=2ht$ - площа поперечного перерізу кільця.

Для розв'язування задачі визначення критичного навантаження $p_{кр}$, у результаті дії якого кільце втрачає свою початкову кругову форму, в системі диференціальних рівнянь (7) скористаємося замінами, котрі затосовувалися Х.С. Головіним [1] та В.В. Болотіним [8], $\tau_i = 0$:

$$M(\varphi) = pRw(\varphi), \qquad q^+ = -\frac{p}{R}(\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w). \tag{8}$$

Підставивши їх у (9), отримаємо диференціальне рівняння для радіальних переміщень w середньої лінії кільця

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + k^2 w = 0, \tag{9}$$

де $k^2 = \dfrac{1+\alpha_1 pR^3/(E_\varphi I')}{1-0.6\alpha_2 pR/(hG')}$; $\alpha_1 = 1 - \dfrac{E_\varphi I'}{2E_3R^3}\left(1-2\nu'\right)$;

$\alpha_2 = 1 - \dfrac{2}{3}\dfrac{\nu' G'}{E_3} + \dfrac{5}{6}\dfrac{h}{R}\dfrac{G'}{E_3}\left(1-2\nu'\right).$

Розв’язком рівняння (9) буде залежність:

$$w\left(\varphi\right) = C_1 \sin k\varphi + C_2 \cos k\varphi, \tag{10}$$

де коефіцієнти C_1 та C_2 залишаються довільними, але нескінченно малими.

У зв’язку із замкненістю кільця граничні умови замінюються умовою, що функція $w\left(\varphi\right)$ має бути періодичною функцією від φ з періодом $2\pi n$, де $n = 1, 2, 3, \dots$. Тобто, $k\left(\varphi + 2\pi\right) = k\varphi + 2\pi n$, або $k = n.$

Рівняння (9) буде задовольнятися тоді, коли виконуватиметься рівність

$$p = (m^2 - 1)\frac{E_\varphi I'}{R^3}\cdot\kappa. \tag{11}$$

де κ – коефіцієнт, що враховує вплив деформацій поперечного зсуву та обтиснення:

$$\kappa = (\alpha_1 + 0.4\alpha_2 m^2 h^2 E_\varphi / (R^2 \cdot G'))^{-1}. \tag{12}$$

Ю.М. Тарнопольським та А.В. Розе дана задача була розв’язана у постановці плоскої задачі теорії пружності, коли товщина кільця вважалася сталою ($\varepsilon_z = 0$). Формула для критичного тиску (за такої постановки) ними була записана наступним чином:

$$p = (m^2 - 1)\frac{E_\varphi I'}{R^3} \cdot \varphi_m, \tag{13}$$

де $\varphi_m = \dfrac{3\left(\kappa_m - th\kappa_m\right)}{\kappa_m{}^3} \approx \left(1 + 0,4\kappa_m^2\right)^{-1}$; $\kappa_m \approx 2m\dfrac{h}{R}\sqrt{\dfrac{E_\varphi}{G'}}$.

Поклавши у формулі (12) параметри $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $I' = I$, одержимо частковий результат(13), отриманий за умови нехтування впливу обтиснення поперечного перерізу кільця, коли $\nu' = 0$, а поперечний модуль пружності E_3 прямує до нескінченності [7]:

$$\kappa = \kappa_T = \left(1 + 0,4\kappa_m^2\right)^{-1},\ \kappa_m^2 = 4m^2h^2E_\varphi / (R^2 \cdot G')\ .$$

Приймаючи мінімальне значення $m = 2$, одержимо вираз для критичного навантаження, який можна записати у формі:

$$p_{кр} = p_{кр}^{кл} \cdot \kappa, \tag{14}$$

де $p_{кр}^{кл} = \dfrac{3E_\varphi I}{R^3}$ – критичний тиск, отриманий Морісом Леві [2] за формулами класичної теорії кривих стрижнів без урахування деформацій поперечного зсуву та обтиснення.

Викривлена форма кільця, що відповідає критичному навантаженню, описується рівнянням:

$$w = C_1 \cos 2\varphi + +C_2 \sin 2\varphi\ . \tag{15}$$

Із рівняння (15) видно, що при втраті стійкості кільце приймає овальну форму. Аналіз формул (11) - (15) приводить до висновку, що поперечний зсув та обтиснення значно понижують величину критичного тиску для композитного кільця. Так, для ізотропного кільця, коли відношення: $E_\varphi / E_3 = 1;\ E_\varphi / G' = 2,6;\ \nu = 0,3;\ h / R = 0,1$, коефіцієнт $\kappa = 0,96$, а для композитного кільця з відношеннями модулів: $E_\varphi / E_3 = 10;\ E_\varphi / G' = 20$; $\nu'' = 0,3;\ \nu' = 0,03 -$ коефіцієнт $\kappa = 0,75$. Тобто, у цьому випадку критичне навантаження знизилося на 25%.

З одержаних формул, як частковий випадок, легко одержується результат Ю.М. Тарнопольского та А.В. Розе $-\kappa = 0,76$, що враховує тільки деформацію поперечного зсуву. Тобто, вплив поперечного обтиснення ще більше знижує значення критичного тиску. У формулах [2] Моріса Леві (1884), що одержані на базі рівнянь класичної теорії криволінійних стрижнів, значення параметра $\kappa = 1$. Тобто, неврахування впливу поперечного зсуву та обтиснення значно завищує величину критичного тиску для кільця по причині, що кільце у радіальному напрямку вважається таким самим жорстким, як і у тангенціальному. Уточнені результати є значно нижчими порівняно із класичними, що узгоджується із результатами (аналітичними та експериментальними) для прямолінійних стрижнів. Так, у експериментальних дослідженнях Л.В. Баєва та Н.Г. Торшенова (1968) для склопластикових прямолінійних стрижнів ці висновки узгоджувалися та наближалися до аналітичних, де ураховувалися згадані уточнення. Для композитних елементів у вигляді кілець та арок подібні дослідження авторам невідомі.

Висновки

Отримані нові рівняння та формули визначення величини критичного тиску для композитного кільця, де враховуються деформації поперечного зсуву та обтиснення. Отримано величину критичного тиску для композитного кільця, яка близька до аналогічного результату Ю.М. Тарнопольского та А.В. Розе, якщо знехтувати ефектом врахування деформації поперечного обтиснення. Для випадків ізотропного та композитного матеріалів наведені числові результати для коефіцієнтів уточнення величини критичного тиску для кільця, порівняно із результатами класичної теорії. Разом з тим, результат, що отриманий для кільця із композитного матеріалу, приблизно на 20% нижчий від аналогічного результату, коли б матеріал кільця був ізотропним. Підрахунки показали, що вплив деформації поперечного обтиснення для кільця із відносною товщиною $h/R = 0{,}1$ є незначним – у межах 1-2%%, залежно відношення модулів пружності. Причинами такого пониження є урахування деформацій поперечного зсуву та обтиснення.

References

1. Golovy`n X.S. Odna y`z zadach staty`ky` uprugogo tela. // Y`zv. S.-Peterburgskogo prakty`cheskogo texnology`cheskogo y`nsty`tuta, 1880-1881, str.373-410.

2. Ty`moshenko S.P. Ustojchy`vost` sterzhnej, plasty`n y` obolochek. M.: Nauka, 1971. 808 s.

3. Lexny`czky`j S.G. Any`zotropnыe plasty`nky`. Y`zd.2-e.-M.: Gos.y`zd. texn.-teor. ly`teraturы.1957. 416 s.

4. Ambarczumyan S.A. Teory`ya any`zotropnыx plasty`n. M,: Nauka, 1987. 360s.

5.Tarnopol`sky`j Yu.M. Osobennosty` rascheta detalej y`z army`rovannыx plasty`kov / Yu.M. Tarnopol`sky`j, A.V. Roze A.V. // Ry`ga: Zy`natne, 1969. 276 s.

6. Sheremet`ev M.P. K postroeny`yu utochnennoj teory`y` plasty`n M.P. Sheremet`ev , B.L. Pelex // Y`nzh. zhurnal. 1964. T.4. V.3. S.504-509.

7. Shvab'yuk V.I. Linijne deformuvannya, micznist` i stijkist` kompozy`tny`x obolonok seredn`oyi tovshhy`ny` V.I. Shvab'yuk, S.V. Rotko / monografiya. Lucz`k, 2015. 264 s.

8. Boloty`n V.V. Ob uravneny`yax teory`y` ustojchy`vosty` tonky`x uprugy`x obolochek // Mexany`ka tverdogo tela. 1967, # 4. S. 12-16.

9. Baev L.V. Ustojchy`vost` sterzhnej y`z stekloplasty`kov / L.V.Baev, N.G. Torshenov // Mexany`ka poly`merov. 1968. #5.

Список використаних джерел

1. Головин Х.С. Одна из задач статики упругого тела. // Изв. С.-Петербургского практического технологического института, 1880-1881, стр. 373-410.

2. Тимошенко С.П.Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. 808 с.

3. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. Изд.2-е.-М.: Гос.изд. техн.-теор. литературы.1957. 416 с.

4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М: Наука, 1987. 360с.

5.Тарнопольский Ю.М. Особенности расчета деталей из армированных пластиков / Ю.М. Тарнопольский, А.В. Розе А.В. // Рига: Зинатне, 1969. 276 с.

6. Шереметьев М.П. К построению уточненной теории пластин М.П. Шереметьев, Б.Л. Пелех // Инж. журнал. 1964. Т.4. В.3. С.504-509.

7. Шваб'юк В.І. Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини /В.І. Шваб'юк, С.В. Ротко / монографія. Луцьк, 2015. 264 с.

8. Болотин В.В. Об уравнениях теории устойчивости тонких упругих оболочек // Механика твердого тела. 1967, № 4. С. 12-16.

9. Баев Л.В. Устойчивость стержней из стеклопластиков / Л.В.Баев, Н.Г. Торшенов // Механика полимеров. 1968. №5.