УДК 539.3 DOI:10.36910/6775-2410-6208-2020-3(13)-11

ДО ПРОБЛЕМИ УТОЧНЕННЯ РІВНЯНЬ ДИНАМІКИ ОРТОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ІЗ УРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЙ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ ТА ОБТИСНЕННЯ

TO THE PROBLEM OF REFINING THE EQUATIONS FOR ORTHOTROPIC SHELLS DYNAMICS TAKING INTO ACCOUNT DEFORMATIONS OF TRANSVERSE SHEAR AND COMPRESSION

Ротко С.В., к.т.н., доц., Швабюк В.В., к.т.н., доц., Зубовецька Н.Т., к.т.н., доц., Ужегова О.А., к.т.н., доц., Гераськін О.О., магістр (Луцький національний технічний університет, м. Луцьк)

Rotko S.V., Ph.D. in Engineering, Associate Professor, Shvabyuk V.V., Ph.D. in Engineering, Associate Professor, Zubovetska N.T., Ph.D. in Engineering, Associate Professor, Uzhehova O.A., Ph.D. in Engineering, Associate Professor, Heraskin O.O., master (Lutsk National Technical University, Lutsk)

У роботі, для виведення динамічних рівнянь руху ортотропної оболонки в зусиллях і моментах, що діють у поперечних перерізах оболонки, використовується варіаційний принцип Гамільтона - Остроградського, на основі якого також формулюються граничні та початкові умови. Із отриманої системи рівнянь, нехтуючи функцією, що враховує поперечне обтиснення, а також членами, що відображають вплив кривин серединної поверхні, можна отримати варіанти некласичної теорії оболонок С.О. Амбарцумяна, теорії типу Тимошенка та інших.

The article is examining a problem of equation system design for orthotropic shells dynamics taking into account deformations of transverse shear and compression. Transverse shear deformations are only partially taken into account in the existing dynamic calculation equations of theories of Tymoshenko-type shells. The stress-deformed state in such shells is determined on the basis of simplified formulas. These formulas are based on the hypotheses of linearity of deformations in tangential directions and their constancy in the transverse direction.

The authors propose a variant of the non-classical model of the dynamics of orthotropic shells. The tangential normal stresses of this model are expressed in terms of bending moments and transverse forces according to the corresponding dependences. These dependences change (relative to the transverse coordinate) according to the cubic law in tangential directions, and the tangential stresses - according to the law of a square parabola.

To derive the dynamic equations of motion of the orthotropic shell in the forces and moments acting in the cross sections of the shell, the Hamilton-Ostrogradsky variational principle is used. Boundary and initial conditions are also formulated on the basis of this

principle. The resulting system of five differential equations is a complete system of equations with respect to the five functions sought. The general order of such a system of differential equations in partial derivatives is 14. The Helmholtz equation is additional to the classical Kirchhoff-Lev theory.
Therefore, when solving specific boundary value problems, it is necessary to attach boundary and initial conditions to this system. Their number should not exceed seven.

From the obtained system of equations, neglecting the function that takes into account the transverse compression, as well as the terms that reflect the influence of the curvatures of the middle surface, we can obtain variants of the nonclassical theory of shells S.O. Ambartsumian, theories such as Tymoshenko and others.

Ключові слова: ортотропні оболонки, рівняння динаміки, принцип Гамільтона-Остроградського, деформації поперечного зсуву та обтиснення.

Key words: orthotropic shells, equations of dynamics, Hamilton-Ostrogradsky principle, transverse shear deformations and compression.

Вступ. Першими спробами розрахунку ізотропних оболонок на основі гіпотез більш загальних, ніж гіпотези Кірхгофа-Лява, можна вважати ґрунтовні роботи початку сорокових років минулого століття таких учених як М.О. Кільчевський [1], А.Л. Гольденвейзер [2], В.В. Новожилов [3], А.І. Лур'є [4] та інших [5], де було визначено порядок похибки класичної теорії оболонок, порівняно із рівняннями теорії пружності, а також необхідність прийняття нових, більш точних, гіпотез. Уже в п'ятидесятих роках та на початку шестидесятих повністю сформувалися так звані некласичні теорії типу Тимошенка-Рейсснера [6], Е.І Григолюка та інш. [7]. Цим теоріям відповідає лінійна модель зміни компонент вектора переміщень і тензора напружень за товщиною [6]:

$$U = u + \gamma_\alpha z; \quad V = v + \gamma_\beta z; \quad W = w(\alpha, \beta). \tag{1}$$

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{2h} + \frac{3M_\alpha \cdot z}{2h^3}, \; \tau_{\alpha z} = \frac{Q_\alpha}{2hk'} \qquad (\alpha \leftrightarrow \beta). \tag{2}$$

Тут величини *u*, *v*, *w* характеризують переміщення точок серединної поверхні оболонки чи пластини; $\gamma_\alpha, \gamma_\beta$ – узагальнені кути повороту нормального волокна в площинах (α,z) і (β,z); $N_\alpha,\ Q_\alpha, M_\alpha -$ зусилля та моменти в перерізах оболонки; $2h, W -$ товщина та радіальне переміщення оболонки, що не залежить від поперечної координати z; k' – коефіцієнт зсуву, значення якого вибирається залежно від закону розподілу дотичних напружень у поперечному напрямку. Як правило, він приймається рівним $k' = 5/6$.

Широке застосування для побудови статичних двовимірних моделей анізотропних оболонок і пластин знайшов ітераційний метод гіпотез С.О. Амбарцумяна [8], який, на відміну від теорій типу Тимошенка-

Рейсснера та П. Нагді [9], передбачає зміну за товщиною пластини та оболонки основних нормальних напружень у тангенціальних напрямках за законом кубічної параболи, а дотичних напружень $\tau_{\alpha z}, \tau_{\beta z}$ – за законом квадратної параболи. Переміщення такої моделі записуються наступним чином:

$$U = u + z\gamma_\alpha + z\left(\frac{1}{5} - \frac{z^2}{3h^2}\right)\cdot\psi_\alpha;\ V = v + z\gamma_\beta + z\left(\frac{1}{5} - \frac{z^2}{3h^2}\right)\cdot\psi_\beta; \quad (3)$$
$$W = w(\alpha, \beta).$$

У наведених формулах невідомі функції ψ_α і ψ_β визначаються через поперечні сили Q_α і Q_β та відповідні узагальнені кути повороту γ_α і γ_β у вигляді:

$$\psi_\alpha = \frac{3Q_\alpha}{4G_{\alpha z}h},\ \ \gamma_\alpha = -\frac{1}{A_\alpha}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{3Q_\alpha}{5G_{\alpha z}h} + k_\alpha u,\ (\alpha \leftrightarrow \beta).$$

Системи (1), (3) записані у формі, з якої добре видно як природу уточнення, так і різницю між класичною та уточненими теоріями тонких пластин і оболонок. Із аналізу цих формул видно, що в доданках для тангенціальних переміщень основну роль відіграє множник $Q_i / 2G_{iz}h$, куди входить поперечна сила (чисельник) та зсувна жорсткість (знаменник). Нехтування цим множником веде до переходу до класичної моделі тонких оболонок. Тому для композитних матеріалів із низькою зсувною жорсткістю цей множник може бути досить значним як для величин переміщень, так і для величин напружень. Дещо пізніше (1970р.), уточнена модель пластин С.О. Амбарцумяна враховує ще й поперечне обтиснення, яке отримане із залежностей закону Гука для поперечного нормального напруження σ_z за умови, що воно змінюється за законом кубічної параболи:

$$\sigma_z = q_1 + \frac{1}{4}\left(3\frac{z}{h} - \frac{z^3}{h^3}\right)q_2;\ \ q_1 = 0,5\left(q^+ - q^-\right);\ q_2 = q^+ + q^-,$$

де $q^\pm$ – відповідні поверхневі навантаження, що діють на зовнішніх поверхнях оболонки $z = \pm h$.

1. Основні залежності для переміщень і напружень узагальненої некласичної моделі ортотропних оболонок. У роботі [10], враховуючи вплив поперечного нормального напруження σ_z та деформації обтиснення ε_z, була узагальнена система рівнянь (3) до більш досконалого вигляду [11]:

$$U(\alpha,\beta,z)=u+z\cdot\gamma_\alpha+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}z-\frac{z^3}{h^2}+z^2k_\alpha\right)\cdot\psi_\alpha\,,$$

$$V(\alpha,\beta,z)=v+z\cdot\gamma_\beta+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}z-\frac{z^3}{h^2}+z^2k_\beta\right)\cdot\psi_\beta\,, \tag{4}$$

$$W(\alpha,\beta,z)=w+z\cdot\frac{q_1}{E_3}+\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{z^2}{h}-\frac{z^4}{6h^3}\right)\cdot\frac{q_2}{E_3}+\left[\frac{A_1}{A_\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+\frac{A_2}{A_\beta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right]\frac{z^2}{2}-$$

$$-\left(\frac{A_1}{A_\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+A_1k_\alpha w\right)z.$$

Формули для напружень у поперечних перерізах оболонки, за урахування рівностей (4), були виражені через внутрішні зусилля і моменти у вигляді [10,11]:

$$\sigma_\alpha=\frac{N_\alpha}{2h\left(1+k_\beta z\right)}+\frac{3M_\alpha\cdot z}{2h^3\left(1+k_\beta z\right)}+\frac{\tilde{E}_1}{A_\alpha K_\alpha}\cdot\frac{\partial Q_\alpha}{\partial\alpha}\cdot\varphi_\alpha(z)+\rho z A_1\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+$$

$$+\frac{\nu_{12}\tilde{E}_1}{K_\beta\cdot A_\beta}\cdot\frac{\partial Q_\beta}{\partial\beta}\cdot\varphi_\beta(z)+\tilde{q}_2\left(k_\alpha+\nu_{12}k_\beta\right)\cdot\varphi_q(z),\ \begin{pmatrix}\alpha\leftrightarrow\beta\\ 1\leftrightarrow 2\end{pmatrix}; \tag{5}$$

$$\tau_{\alpha\beta}=\frac{N_{\alpha\beta}}{2h\left(1+k_{\beta z}\right)}+\frac{3M_{\alpha\beta}\cdot z}{2h^3\left(1+k_{\beta z}\right)}+\frac{G_{12}}{K_\alpha A_\beta}\cdot\frac{\partial Q_\alpha}{\partial\beta}\cdot\varphi_\alpha(z)+\frac{G_{12}}{K_\beta A_\alpha}\cdot\frac{\partial Q_\beta}{\partial\alpha}\cdot\varphi_\beta(z);$$

$$\tau_{\alpha z}=\frac{G_{13}}{K_\alpha}\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)\left(1-\frac{z}{3}k_\alpha\right)Q_\alpha,\quad \begin{pmatrix}\alpha\leftrightarrow\beta\\ 1\ \leftrightarrow 2\end{pmatrix};\ \tilde{q}_2=q_2+2\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2},$$

де зусилля і моменти у поперечних перерізах оболонки знаходять наступним чином: $N_\alpha\,,M_\alpha=\dfrac{1}{A_\beta}\displaystyle\int_{-h}^{h}(1,z)\cdot\sigma_\alpha\cdot H_\beta dz\,,(\alpha\to\beta);$

$$N_{\alpha\beta}\,,M_{\alpha\beta}=\frac{1}{A_\beta}\int_{-h}^{h}(1,z)\cdot\tau_{\alpha\beta}\cdot H_\beta dz;\ Q_\alpha=\frac{1}{A_\beta}\int_{-h}^{h}\tau_{\alpha z}\cdot H_\beta dz\,,$$

$$\varphi_\alpha(z)=f_\alpha(z)\cdot\left(1+k_{\beta z}\right)^{-1},(\alpha\to\beta);\quad \varphi_q(z)=-\frac{3}{8}\frac{\tilde{E}_1}{E_3 h}\cdot\frac{f_q(z)}{\left(1+k_\beta z\right)}.$$

Коефіцієнти Ляме у вибраній триортогональній системі координат мають вигляд:

$H_\alpha = A_\alpha\left(1+k_\alpha z\right), \quad A_\alpha = A_\alpha\left(\alpha,\beta\right), \quad (\alpha\to\beta), H_z = 1$ – коефіцієнти першої квадратичної форми координатної поверхні, $k_\alpha = k_\alpha\left(\alpha,\ \beta\right)$, $k_\beta = k_\beta\left(\alpha,\beta\right)$ – головні кривини координатної поверхні оболонки на лініях, відповідно $\alpha = const$, $\beta = const$.

Необхідно зауважити, що формули (5) уже записані із урахуванням того фактору, що на оболонку діє динамічне навантаження у вигляді сили інерції — $\rho z \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}$, котре є ще одним доданком у формулі для напруження σ_z, а у формулах для σ_α і σ_β з'являються відповідні доданки: $\rho z A_1 \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ і $\rho z A_2 \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}$.

2. Основні рівняння руху для ортотропних оболонок. Диференціальні рівняння руху елемента оболонки в напруженнях у криволінійних координатах α,β,z, із урахуванням закону парності дотичних напружень, коли $H_z = 1$, мають вигляд [11]:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(H_\beta\sigma_\alpha\right)+\frac{1}{H_\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}\left(H_\alpha^2\tau_{\alpha\beta}\right)-\sigma_\beta\cdot\frac{\partial H_\beta}{\partial\alpha}+$$
$$+\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial}{\partial z}\left(H_\alpha^2 H_\beta\tau_{\alpha z}\right)+F_\alpha H_\alpha H_\beta=\rho H_\alpha H_\beta\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},\ \left(\alpha\leftrightarrow\beta\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(H_\alpha H_\beta\cdot\sigma_z\right)-\sigma_\alpha H_\beta\frac{\partial H_\alpha}{\partial z}-\sigma_\beta H_\alpha\frac{\partial H_\beta}{\partial z}+ \tag{6}$$
$$+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(H_\beta\tau_{\alpha z}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(H_\alpha\tau_{\beta z}\right)+F_z\cdot H_\alpha H_\beta=\rho H_\alpha H_\beta\frac{\partial^2 W}{\partial t^2},$$

де F_α, F_β, F_z – компоненти вектора об'ємної сили у відповідних координатних напрямках, $\rho -$ густина матеріалу, $t -$ час.

Система диференціальних рівнянь руху елемента оболонки (6) в *напруженнях* використовується для отримання точних розв'язків задач теорії пружності і не може бути ефективно використана у некласичних теоріях оболонок, за тих чи інших гіпотез. Згадані теорії використовують аналогічні системи рівнянь, котрі записуються через відповідні *зусилля і моменти* у поперечних перерізах оболонки. Для їх отримання використовують різні методи, але найбільш логічними, на даний час, вважаються варіаційні енергетичні методи Лагранжа, Рейсснера та інших [11,12]. Зокрема, у роботі [12] для виведення рівнянь руху оболонки через *зусилля і моменти* у поперечних перерізах оболонки використовується варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0 \ , \qquad (7)$$

де $\delta L = \delta K - \delta \Pi + \delta A$; $L -$ функціонал Лагранжа, K і $\Pi -$ кінетична і потенціальна енергії системи; A – робота зовнішніх сил:

$$\delta K = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \cdot \delta U + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \cdot \delta V + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \cdot \delta W \right) \cdot H_\alpha \cdot H_\beta \cdot d\alpha \cdot d\beta \cdot dz -$$

варіація кінетичної енергії системи;

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \left(\sigma_\alpha \cdot \delta e_\alpha + \sigma_\beta \cdot \delta e_\beta + \sigma_z \cdot \delta e_z + \tau_{\alpha\beta} \cdot \delta e_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha z} \cdot \delta e_{\alpha z} + \right.$$

$$\left. + \tau_{\beta z} \cdot \delta e_{\beta z} \right) \times H_\alpha \cdot H_\beta \cdot d\alpha \cdot d\beta \cdot dz -$$ – варіація потенціальної енергії деформації;

$$\delta A = \iiint\limits_V \left(F_\alpha \cdot \delta U + F_\beta \cdot \delta V + F_z \cdot \delta W \right) \cdot H_\alpha \cdot H_\beta \cdot d\alpha \cdot d\beta \cdot dz +$$

$$+ \iint\limits_S \left(q^- \cdot H_\alpha^- \cdot H_\beta^- \cdot \delta W^- - q^+ \cdot H_\alpha^+ \cdot H_\beta^+ \cdot \delta W^+ \right) \cdot d\alpha \cdot d\beta \quad -$$

– варіація роботи об'ємних і поверхневих сил; $W^\pm, H^\pm_{\alpha,\beta}$ – значення величин на зовнішніх поверхнях оболонки $\left(z = \pm h \right)$;

$$e_\alpha = \frac{1}{H_\alpha} \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} + k_\alpha A_\alpha W \right), \qquad \begin{pmatrix} \alpha \to \beta \\ U \to V \end{pmatrix};$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\beta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \beta}; \qquad e_z = \frac{\partial W}{\partial z};$$

$$e_{\alpha z} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{H_\alpha} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - k_\alpha A_\alpha U \right), \qquad \begin{pmatrix} \alpha \to \beta \\ U \to V \end{pmatrix}.$$

Надалі у виразі для $\delta \Pi$ впливом напружень σ_z будемо нехтувати, а у виразі δA об'ємні сили F_α, F_β *і* F_z будемо вважати рівними нулю.

Виражаючи напруження через зусилля і моменти та підставляючи їх разом із деформаціями у вираз для варіації потенціальної енергії $\delta \Pi$, одержуємо, після інтегрування за змінною z, кінцевий вигляд варіації $\delta \Pi$:

$$\delta\Pi = -\frac{1}{2}\iint\limits_S \Bigg(\Bigg(\ A_\beta \cdot \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + A_\alpha \cdot \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + k_\alpha \cdot \left(A_\beta \cdot \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} + \right.$$

$$\left. + A_\alpha \cdot \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right) \cdot \delta\tilde{u} + \left(A_\alpha \cdot \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + A_\beta \cdot \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + k_\beta \times \right. \qquad (8)$$

$$\left. \times \left(A_\alpha \cdot \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} + A_\beta \cdot \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} \right)\right) \cdot \delta\tilde{v} + \left(\frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(A_\beta \cdot \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} + \right.\right.$$

$$\left. + A_\alpha \cdot \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(A_\alpha \cdot \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} + A_\beta \cdot \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} \right) -$$

$$\left. - A_\alpha A_\beta \cdot \left(k_\alpha N_\alpha + k_\beta N_\beta \right) \right) \delta\tilde{w} + \frac{4}{5}\lambda_\alpha \left(A_\beta \cdot \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} + \right.$$

$$\left. + A_\alpha \cdot \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - A_\alpha A_\beta \tilde{Q}_\alpha \right) \cdot \delta\psi_\alpha + \frac{4}{5}\lambda_\beta \left(A_\alpha \cdot \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} + \right.$$

$$\left.\left. + A_\beta \cdot \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - A_\alpha A_\beta \tilde{Q}_\beta \right) \cdot \delta\psi_\beta \ \right) d\alpha\, d\beta +$$

$$+ \int_\Gamma \Big(N_{\alpha n} \cdot \delta\tilde{u} + N_{\beta n} \cdot \delta\tilde{v} + M_{\alpha n} \cdot \delta\gamma_\alpha + M_{\beta n} \cdot \delta\gamma_\beta + \tilde{M}_{\alpha n} \cdot \delta\psi_\alpha +$$

$$+ \tilde{M}_{\beta n} \cdot \delta\psi_\beta + Q_n \delta\tilde{w} \Big) \cdot d\Gamma, \quad Q_n = \tilde{Q}_\alpha\, l + \tilde{Q}_\beta\, m,$$

де Γ – межа контуру області S; $N_{\alpha n} = N_\alpha l + N_{\alpha\beta} m,$

$$M_{\alpha n} = M_\alpha l + M_{\alpha\beta} m, \quad \tilde{M}_{\alpha n} = \tilde{M}_\alpha l + \tilde{M}_{\alpha\beta} m, \quad \begin{pmatrix} \alpha \to \beta \\ u \to v \end{pmatrix};$$

$$\tilde{Q}_\alpha = Q_\alpha / \lambda_\alpha, \lambda_\alpha = 1 - 5k_\alpha^2 h^2 / 9; \quad \tilde{u} = u + \frac{1}{9} h^2 \cdot k_\alpha \cdot \psi_\alpha .$$

Варіацію потенціалу зовнішніх навантажень, після деяких алгебраїчних перетворень, можна записати так

$$\delta A = \iint\limits_S q_z \delta\tilde{w} \cdot ds. \qquad (9)$$

Тут $\tilde{w} = w + 0,2h^2 \cdot w_2$; $w_2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{q_2 z^2}{hE_3} + \frac{1}{2}\left[\frac{A_1}{A_\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{A_2}{A_\beta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right]$;

$q_z = q_2(1 + k_\alpha k_\beta h^2) + 2q_1(k_\alpha + k_\beta)h$ – узагальнене навантаження у напрямку осі Oz.

Підставивши рівності (8),(9) у варіаційне рівняння (7) і прирівнюючи до нуля в поверхневому інтегралі коефіцієнти біля незалежних варіацій $\delta\tilde{u}, \delta\tilde{v}, \delta\tilde{w}, \delta\psi_\alpha, \delta\psi_\beta$, одержимо систему п’яти диференціальних рівнянь руху для ортотропної оболонки

$$\frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + k_\alpha \tilde{Q}_\alpha = 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \begin{pmatrix} \alpha \leftrightarrow \beta \\ u \leftrightarrow v \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} - \tilde{Q}_\alpha = \frac{2}{3}\rho h^3 \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial t^2}, (\alpha \to \beta); \tag{10}$$

$$\frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial \tilde{Q}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial \tilde{Q}_\beta}{\partial \beta} - k_\alpha N_\alpha - k_\beta N_\beta = -q_z + 2\rho h \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2}.$$

Якщо в систему рівнянь руху (10) замість зусиль і моментів підставити їх відповідні значення, записані через деформації і переміщення, то ми одержимо систему диференціальних рівнянь у частинних похідних 14-го порядку.

Система п’яти диференціальних рівнянь (10) є повною системою рівнянь відносно п’ятьох шуканих функцій $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$, γ_α і γ_β.

Формулювання граничних і початкових умов. При інтегруванні такої системи її розв‘язки повинні задовольняти семи граничним умовам на краях оболонки. Рівності для формулювання граничних умов можна одержати, прирівнюючи до нуля кожну складову контурного інтеграла у виразі (8)

$$N_\alpha \delta\tilde{u} = 0, \quad N_{\alpha\beta}\delta\tilde{v} = 0, \quad Q_\alpha \delta\tilde{w} = 0,$$

$$M_\alpha \delta\gamma_\alpha = 0, \quad M_{\alpha\beta}\delta\gamma_\beta = 0, \quad \tilde{M}_\alpha \delta\psi_\alpha = 0,$$

$$\tilde{M}_{\alpha\beta}\delta\psi_\beta = 0, \quad \text{при} \quad \alpha = const; \tag{11}$$

$$N_\beta \delta\tilde{v} = 0, \quad N_{\alpha\beta}\delta\tilde{u} = 0, \quad Q_\beta \delta\tilde{w} = 0,$$

$$M_\beta \delta\gamma_\beta = 0, \quad M_{\alpha\beta}\delta\gamma_\alpha = 0, \quad \tilde{M}_\beta \delta\psi_\beta = 0,$$

$$\tilde{M}_{\alpha\beta}\delta\psi_\alpha = 0, \quad \text{при} \quad \beta = const.$$

На базі умов (11) легко формуються різні статичні або геометричні граничні умови на краях оболонки. Наприклад, для жорсткого закріплення краю оболонки необхідно, щоб виконувались умови:

$$u = v = w = \gamma_\alpha = \gamma_\beta = \psi_\alpha = \psi_\beta = 0. \tag{12}$$

До цих рівнянь мають бути приєднані початкові умови при $t = 0$:

$$\tilde{w} = w_0(\alpha, \beta), \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = w_1(\alpha, \beta),$$

$$\tilde{u} = u_0(\alpha, \beta), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = u_1(\alpha, \beta), \;\; \tilde{v} = v_0(r, \theta), \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = v_1(r, \theta), \tag{13}$$

де $w_0, v_0, u_0, u_1, v_1, w_1$ – задані компоненти початкового переміщення і початкової швидкості від точки (α, β).

Для зведення системи рівнянь руху (10) до подібної (близької), що отримана для пологих ортотропних оболонок типу С.П.Тимошенка, чи С.О. Амбарцумяна, необхідно функції кутів зсуву ψ_α і ψ_β виразити через відповідні похідні від невідомої складової переміщення поперечного зсуву w_τ і так званої функції кручення Ω:

$$\psi_\alpha = \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial w_\tau}{\partial \alpha} - \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}, \quad \psi_\beta = \frac{1}{A_\beta} \cdot \frac{\partial w_\tau}{\partial \beta} + \frac{1}{A_\alpha} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}. \tag{14}$$

Скориставшись цим розкладом і залежностями (14), перетворимо систему рівнянь (10) у систему рівнянь виду:

$$[L] \cdot \{V\} = \{Q\}. \tag{15}$$

Тут $[L] = (L_{ij}), (i, j = 1, 2, ..., 5)$ – матриця диференційних операторів L_{ij} від шуканих функцій $\{V\} = colon\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{w}_\tau, \Omega\}$; $\{Q\} = colon\{L_{i6}\tilde{q}_i\}$ – вектор-стовпець диференційних операторів від функції навантаження. Лінійні оператори L_{ij} наведені в додатках 1,2 монографії [11]. У випадку відсутності поверхневого статичного навантаження величини $\tilde{q}_i$ спрощуються до значень:

$$\tilde{q}_1, \tilde{q}_2 = \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \frac{1}{E_i}; \; \tilde{E}_i = \frac{E_i}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}, \; \left(1 \to 2\right) \tag{16}$$

$$\tilde{q}_3, \tilde{q}_4 = \left(\frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \gamma_\beta}{\partial t^2} \right) \frac{\rho}{\tilde{E}_i} - \frac{\rho A_i}{\tilde{E}_i} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2}; \; \tilde{q}_5 = \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} \frac{\rho}{G_{12}}.$$

Система п'яти диференціальних рівнянь (10) є повною системою рівнянь відносно п'ятьох шуканих функцій $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{w}_\tau$ і Ω. Загальний порядок такої системи диференціальних рівнянь в частинних похідних дорівнює 14. При розв'язуванні конкретних крайових задач до цієї системи необхідно приєднати граничні і початкові умови (11), (13). Їх кількість не повинна перевищувати семи.

Система рівнянь (15) для оболонок значно спроститься у випадку трансверсально–ізотропного матеріалу $(E_1 = E_2 = E_3, \quad G_{13} = G_{23} = G',$ $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu)$ шляхом введення так званої функції зусиль $F(\alpha, \beta)$, а також допущень, що $\tilde{K}_\alpha = \tilde{K}_\beta = K' \approx \frac{4}{3} G'h, \ \lambda_\alpha = \lambda_\beta \approx 1.$

Наслідуючи В.З. Власова [13] та врахувавши члени з w_τ, приймемо:

$$N_\alpha = \frac{1}{A_\beta^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} - k_\alpha K' w_\tau, \ N_\beta = \frac{1}{A_\alpha^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} - k_\beta K' w_\tau, \tag{17}$$

$N_{\alpha\beta} = -\frac{1}{A_\alpha A_\beta} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta},$ де $F(\alpha, \beta)$ – деяка функція зусиль від координат α і β .

Користуючись виразами (16) для зусиль і першим рівнянням нерозривності М.П.Шереметьєва - Б.Л.Пелеха [6], система рівнянь (10) зводиться до наступної системи рівнянь руху:

$$\Delta\Delta F - 2Eh\Delta_k w - K'\Delta_k' w_\tau = 0,$$

$$D_1 \Delta\Delta' w + \tilde{\delta}\Delta_k F - \varepsilon_\nu \Delta\Delta_k' F - \delta_k w_\tau =$$

$$= 2\rho h(1 + k_\alpha k_\beta h^2)(1 + \varepsilon_\nu' - (\varepsilon - A_0')\Delta)\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2}; \tag{18}$$

$$\Delta_k F - K'\Delta' w_\tau = -2(1 + k_\alpha k_\beta h^2)\rho h \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2};$$

$$\Delta(\Delta\Omega - k^2\Omega) = \frac{\rho}{G}\Delta\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}\right).$$

Тут $\varepsilon_\nu = \frac{D}{2Eh}, \ \varepsilon = \frac{4}{5}\frac{D}{K'}, \ A_0' = \frac{2\nu'' h^2}{5(1-\nu)}, \ k^2 = \frac{2}{\varepsilon(1-\nu)},$

$\tilde{\delta} = 1 + \varepsilon_\nu' - \varepsilon\Delta, \ \varepsilon_\nu' = \varepsilon_\nu \cdot (k_\alpha^2 + k_\beta^2 - 2\nu k_\alpha k_\beta),$

$$\delta_k = \tilde{\delta}(k_\alpha^2 + k_\beta^2)K', \quad k_1 = \frac{5}{3}h(k_\alpha + k_\beta)(1+\nu)^{-1},$$

$$\Delta' = \Delta + k_\alpha^2 + k_\beta^2, \quad \Delta_k' = \Delta_k - \nu\bar{\Delta}_k, \; \Delta = \frac{1}{A_\alpha^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{A_\beta^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\beta^2},$$

$$\Delta_k = \frac{k_\beta}{A_\alpha^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{k_\alpha}{A_\beta^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}, \; \bar{\Delta}_k = \frac{k_\alpha}{A_\alpha^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{k_\beta}{A_\beta^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}.$$

Аналіз системи рівнянь (10), (18) показує, що за формою вони є узагальненням кінематичної та статичної гіпотез Тимошенка для анізотропних оболонок, детально розроблених та сформульованих в обширних монографіях С.О. Амбарцумяна [8], Б.Л. Пелеха [6] та Я.М. Григоренка [14]. Отримати ці рівняння можна із системи рівнянь (18), прирівнявши до нуля члени, що мають множниками величини ν'', E/E', тобто ті, котрі ураховують поперечні напруження σ_z та деформацію ε_z.

Висновок. Побудована уточнена система диференціальних рівнянь руху елемента ортотропної оболонки із використанням варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського, де враховуються деформації поперечного зсуву та обтиснення. Для розв'язування конкретних крайових задач для цієї системи сформульовано граничні та початкові умови, котрі випливають із використаного варіаційного принципу.

References

1. Kilchevskyi M.O. Osnovni rivniannia rivnovahy pruzhnykh obolonok i deiaki metody yikh intehruvannia. Zb.prats in-tu matematyky AN URSR, 1940. ## 4,5,6.

2. Holdenveizer A.L. Teoryia upruhykh tonkykh obolochek. M.: Nauka, 1976. 512s.

3. Novozhylov V.V. Teoryia tonkykh obolochek. M., Sudpromhyz. 1951.

4. Lure A.Y. Obshchaia teoryia upruhykh tonkykh obolochek. PMM, 1940. T. 4, vыр. 2.S. 7-33.

5. Mushtary Kh.M. K voprosu obosnovanyia teoryy tonkykh polohykh obolochek Prykl. Mekhanyka, 1969. T. 5. Vыр. 1. S. 109-113.

6. Pelekh B.L. Teoryia obolochek s nyzkoi sdvyhovoi zhestkostiu. K.: Naukova dumka, 1973. 246 s.

7. Hryholiuk Э.Y. Uravnenyia trekhsloinыkh obolochek s lehkym zapolnytelem. Yzv. AN SSSR, OTN, #1, 1957.

8. Ambartsumian S.A. Obshchaia teoryia anyzotropnыkh obolochek. M.:Nauka, 1974. 446 s.

9. Naghdi P.M. On the theory of thin Elastic Shells. Quart. of Appl. Mathematics, 1957. Vol.14, # 4. P. 369-380.

11. Shvabiuk V.I. Liniine deformuvannia, mitsnist i stiikist kompozytnykh obolonok serednoi tovshchyny / V.I. Shvabiuk, S.V. Rotko. Monohrafiia. Lutsk: RVV LNTU, 2015. 264 s.

12. Khoma Y.Yu. Obobshchennaia teoryia anyzotropnыkh obolochek. K.: Naukova dumka, 1986. 170 s.

13. Vlasov V.Z. Obshchaia teoryia obolochek y eё prylozhenye v tekhnyke. Yzbrannye trudy. M.: Yzd. AN SSSR, 1962. T.I. 784 s.

14. Hryhorenko Ya.M., Vasylenko A.T., Holub H.P. Statyka anyzotropnykh obolochek s konechnoi sdvyhovoi zhestkostiu. K.: Naukova dumka, 1987. 216 c.

Список використаної літератури

1. Кільчевський М.О. Основні рівняння рівноваги пружних оболонок і деякі методи їх інтегрування. Зб.праць ін-ту математики АН УРСР, 1940. №№ 4,5,6.

2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512с.

3. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. М., Судпромгиз. 1951.

4. Лурье А.И. Общая теория упругих тонких оболочек. ПММ, 1940. Т. 4, вып. 2.С. 7-33.

5. Муштари Х.М. К вопросу обоснования теории тонких пологих оболочек Прикл. Механика, 1969. Т. 5. Вып. 1. С. 109-113.

6. Пелех Б.Л. Теория оболочек с низкой сдвиговой жесткостью. К.: Наукова думка, 1973. 246 с.

7. Григолюк Э.И. Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем. Изв. АН СССР, ОТН, №1, 1957.

8. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.:Наука, 1974. 446 с.

9. Naghdi P.M. On the theory of thin Elastic Shells. Quart. of Appl. Mathematics, 1957. Vol.14, № 4. P. 369-380.

10. Шваб'юк В.І. Варіант узагальненої теорії непологих ортотропних оболонок. Машинознавство, 1998. № 7. С.2-8.

11. Шваб'юк В.І. Лінійне деформування, міцність і стійкість композитних оболонок середньої товщини / В.І. Шваб'юк, С.В. Ротко. Монографія. Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2015. 264 с.

12. Хома И.Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. К.: Наукова думка, 1986. 170 с.

13. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложение в технике. Избранные труды. М.: Изд. АН СССР, 1962. Т.І. 784 с.

14. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. К.: Наукова думка, 1987. 216 с.