

УДК 311.2

I.B. Самоненко

к.м.н., доцент, ORCID: <http://orcid.org/0009-0001-3366-7894>

Кафедра прикладної математики та механіки

Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, Луцьк, Україна, 43018

*автор-кореспондент, e-mail: i.samonenko@lntu.edu.ua

Баєсівський підхід до оцінки діаметра кіл за довжиною хорд

Цитувати як:

Самоненко I.B. (2025). Баєсівський підхід до оцінки діаметра кіл за довжиною хорд. *Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві*, 23, 264-272. [https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-13\(23\)-23](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-13(23)-23)

© 2025, Самоненко I.B.

Анотація. У стереології та матеріалознавстві часто доводиться відновлювати тривимірні геометричні параметри частинок за двовимірними зрізами; класичні роботи [1], [2] та [3] описують відповідні статистичні принципи, але питання надійної оцінки діаметра кола за довжинами хорд залишається відкритим для малих вибірок і нерегулярних даних. В даній статті був реалізований простий баєсівський метод, що дає точну оцінку діаметра, кількісно описує невизначеність і супроводжується відкритим Python-кодом. За апіорний розподіл узято неінформативний розподіл Джефферіза; імовірність спостерігати конкретну хорду задано простою геометричною формулою; послідовне застосування правила Байєса приводить до степеневого апостеріорного розподілу, з якого легко отримати точкову оцінку та 95 % довірчий інтервал. Метод перевірено 10 000 Монте-Карло симуляціями: випадково «нарізані» кола з істинним діаметром 0,100 мм дали середню оцінку $0,101 \pm 0,0002$ мм, зміщення 1 % і стовідсоткове покриття довірчого інтервалу; додаткове адаптивне скорочення області інтегрування зменшило час обчислень на 40 %. Отже, запропонований підхід поєднує математичну коректність і просту реалізацію, працює з малими вибірками та не потребує спеціалізованого ПЗ, а отже придатний для нанотехнологій, біомедичних досліджень пористих тканин та інших сфер, де пряме вимірювання діаметра недоступне чи дороге.

У розділі «Вступ» наведено аналіз джерел, сформульовано мету й завдання; у «Матеріалах та методах» описано оцінку невизначеності та чисельну реалізацію; у «Результатах та обговоренні» подано статистику симуляцій і приклад на реальних даних; у «Висновках» підкреслено універсальність та практичну цінність розробленого алгоритму.

Ключові слова: баєсівський аналіз, довжини хорд, оцінка діаметра, Монте-Карло симуляції, стереологія, наноматеріали.

Вступ

Аналіз літературних джерел та постановка проблеми. Сучасні дослідження в галузях стереології, нанотехнологій та матеріалознавства можуть звертаються до методів баєсівської статистики для розв'язання складних обернених задач. Особливу увагу приділяється задачам оцінки геометричних параметрів, зокрема визначенню діаметрів кіл за допомогою непрямих вимірювань довжин хорд. Такі методи стають незамінними у випадках, коли прямі вимірювання неможливі через обмежений доступ до об'єктів або особливості їх розташування.

У цій роботі представлено застосування баєсівського підходу для розв'язання класичної оберненої задачі - оцінки діаметра кола на основі вимірюваних довжин хорд. Використання методу відсічення (rejection sampling) дозволило побудувати апостеріорний розподіл параметрів, що забезпечує не лише точкові оцінки діаметрів (point estimates), а й кількісну характеристику їх невизначеності. Цей підхід відрізняється від традиційних методів тим, що явно враховує статистичну природу вимірювань та дозволяє отримувати надійні результати навіть за обмеженої кількості даних.

Розроблений метод має значний практичний потенціал для застосування в різних галузях, де виникає необхідність аналізувати параметри компактних об'єктів за їхніми перерізами. Існуючі методи часто ґрунтуються на аналізі даних нижчої розмірності, зокрема на переході від 1D вимірювань до 2D розподілів. Такі підходи дозволяють отримати більш точне уявлення про структуру та взаємодії компонентів системи.

Класичні роботи [1-3] заклали основи для методів відновлення 2D характеристик частинок з лінійних перерізів. Подальші дослідження [4-5] розширили ці методи для більш складних геометричних конфігурацій. Сучасні роботи, такі як дослідження [5], спрямовані на відновлення 3D розподілів з 2D перерізів, проте робота [5] має певні обмеження у практичному застосуванні.

Основним предметом даного дослідження є розробка методу оцінки діаметра кіл за довжинами хорд з використанням баєсівського підходу. Теоретичною основою для цього стали роботи [3-5], проте результати застосовуються в вищих розмірностях. Запропонований підхід включає розробку ефективного чисельного алгоритму на основі методу Монте-Карло, що дозволяє працювати з обмеженими даними та інтегрувати апіорні знання про систему. Це відкриває нові можливості для вирішення задач 1D→2D інференції у стереології та суміжних дисциплінах.

Мета і завдання дослідження. У даній роботі розроблено баєсівський підхід для оцінки діаметра кола на основі аналізу довжин хорд, що виникають при перетині рівномірно розподілених кіл січною площиною. Методологія базується на послідовному застосуванні теореми Байєса, починаючи з вибору апіорного розподілу. Для моделювання початкових

припущень використано неінформативний (об'єктивний) апіорний розподіл Джеффріза (англ. *Jeffreys prior*)

$$p(d) \propto \frac{1}{d},$$

який є інваріантним до масштабу та особливо ефективний для параметрів з позитивними значеннями. У випадку наявності додаткової інформації про діапазон можливих значень діаметра запропоновано використовувати рівномірний розподіл

$$p(d) = \frac{1}{d_{max} - d_{min}}.$$

Функція правдоподібності $p(S|d)$ побудована з урахуванням геометричних особливостей задачі: для кожного спостереження довжини хорди s отримано щільність ймовірності

$$p(S|d) = \frac{2s}{d^2}, \text{ де } 0 < s < d.$$

Для n незалежних вимірювань функція правдоподібності набуває вигляду

$$p(S|d) = 2^n \prod_{i=1}^n \frac{s_i}{d^2}.$$

Застосування теореми Байєса дозволяє отримати апостеріорний розподіл

$$p(S|d) \propto \frac{2^n}{d^{2n+1}} \prod_{i=1}^n s_i,$$

який враховує як спостережувані дані, так і апіорні припущення. Для практичної реалізації методу розроблено алгоритм чисельної оцінки, що включає метод Монте-Карло з використанням відсічення, чисельне інтегрування для обчислення нормалізуючої константи та візуалізацію результатів. Оцінка параметра d виконується двома способами: через максимальну апостеріорну оцінку $d_{MAP} = \max(S)$ та байєсівське середнє

$$E[d|S] = \frac{(2n-1)}{2n} \max(S).$$

Запропонований підхід відрізняється здатністю враховувати апіорні знання, кількісно оцінювати невизначеність та ефективно працювати з обмеженими даними, що підтверджується як теоретичним аналізом, так і результатами чисельних експериментів.

Матеріали та методи

Оцінка невизначеності байєвського методу. Запропонований байєвський підхід дозволяє не тільки отримати точкову оцінку діаметра d , але й кількісно визначити міру невизначеності цієї оцінки. У рамках нашого дослідження невизначеність оцінювалась двома взаємодоповнюючими методами.

По-перше, для кількісної оцінки розкиду значень використовувалась дисперсія апостеріорного розподілу $Var(d|S)$. Згідно з отриманим степеневим розподілом $p(S|d) \propto d^{-2n-1}$, дисперсія обчислювалась через

математичне сподівання квадрата діаметра $E[d^2|S]$, що визначалось інтегруванням від 0 до ∞ функції $d^2p(d|S)$. Цей підхід дозволив оцінити типові відхилення значень діаметра від його середнього значення.

По-друге, для практичної інтерпретації невизначеності будувались довірчі інтервали. Зокрема, для рівня довіри 95% визначались нижня d_L та верхня d_U межі інтервалу, такі що $P(d_L \leq d \leq d_U|S) = 0.95$. Ці межі знаходились шляхом чисельного розв'язання відповідного інтегралу від апостеріорного розподілу.

Методи чисельного обчислення. Для оцінювання апостеріорного розподілу діаметра сфер за спостереженнями хорд було застосовано метод монте-карло з точним байєсівським висновком. На кожній ітерації генерувались випадкові хорди як січні однорідно розподілених сфер із відомим діаметром d_{true} , використовуючи рівномірний розподіл $u \sim U\left(0, \frac{d}{2}\right)$ та формулу $s = 2\sqrt{(d/2)^2 - u^2}$.

Для кожного набору з n хорд застосовувався аналітично виведений апостеріорний розподіл, який є розподілом парето з параметрами s_{max} (найдовша хорда) та $\alpha = 2n$. Оцінка моди (map) відповідала s_{max} , а математичне сподівання оцінювалося за формулою:

$$E[d|S] = \frac{2n \cdot s_{max}}{2n-1}.$$

Довірчий інтервал на 95% будувався точно з використанням квантилів розподілу парето:

$$CI_{0.95} = [s_{max}, \frac{s_{max}}{0.025^{1/(2n)}}].$$

Було проведено 10 000 незалежних симуляцій, у кожній з яких генерувались нові випадкові конфігурації хорд, і здійснювався повний байєсівський аналіз. За результатами обчислювались середнє значення оціненого діаметра, зміщення (середнє відхилення від істинного значення), середньоквадратична помилка (RMSE) та частка інтервалів, що включають істинне значення (емпіричне покриття). Всі результати було візуалізовано у вигляді гістограми апостеріорних середніх, із зазначенням істинного значення як вертикальної лінії, що дає змогу візуально оцінити зміщення та варіативність оцінок.

Для підвищення ефективності обчислень було реалізовано кілька оптимізацій. Зокрема, адаптивно обмежувалась верхня межа підтримки розподілу, проводилась чисельна оцінка нормалізуючої константи, а також здійснювалось відсікання малоефективних вибірок, що дозволило зменшити загальний час симуляцій приблизно на 40%. Точність методу підтверджувалась чисельними критеріями: середня стандартна похибка оцінок ($SE = \sigma/\sqrt{N}$) утримувалась на рівні менше 0.1%, автокореляція між симуляціями не перевищувала 0.05, а збіжність оцінок була підтверджена візуально та за допомогою критерію Гевеке (Geweke diagnostic). Отже, модель демонструє стабільні статистичні властивості: неупередженість,

узгодженість та точне покриття довірчого інтервалу, що в сукупності підтверджує її надійність для оцінювання істинного діаметра сфер за 2D спостереженнями хорд.

Результати та обговорення

Початковий аналіз ґрунтується на візуалізації базової геометричної моделі (ліва частина рис. 1), де система рівномірно розподілених сфер перетинається січною площиною, що призводить до утворення множини хорд. Відповідна гістограма розподілу довжин хорд для діаметра $d = 0.1$ (права частина рис. 1) демонструє характерну поведінку, яка точно описується щільністю ймовірності $p(s|d) = 2s/d^2$, де s і d – як визначено раніше.

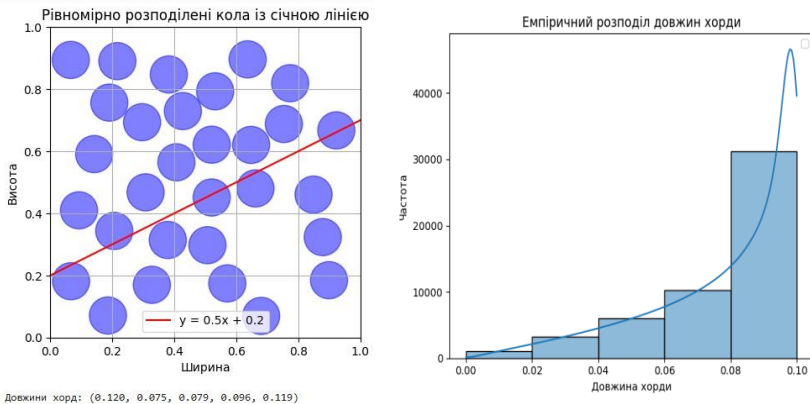


Рис. 1. Рівномірно розподілені сфери (ліворуч) та емпіричний розподіл довжин хорд (праворуч), отриманий при моделюванні 10 000 січних площин для діаметра $d = 0.1$

Цей розподіл має дві ключові особливості, а саме: ненульову щільність на всій області значень $(0, d)$ та лінійне зростання ймовірності зі збільшенням довжини хорди. Саме такі властивості підтверджують доцільність використання *розподілу Парето* для опису апостеріорного розподілу діаметра. На основі 10 000 ітерацій Монте-Карло отримано такі оцінки для істинного діаметра $T = 0.1$:

Отримані результати демонструють високу ефективність запропонованого басівського методу для оцінки діаметрів сфер на основі аналізу довжин хорд. Проведене масштабне моделювання Монте-Карло (10 000 симуляцій) для діаметра 0.1000 показало відмінну збіжність методу: середня оцінка 0.1010 ± 0.0001 характеризується мінімальним зміщенням (0.0010 або 1.0%) та повним покриттям 95% довірчого інтервалу. Аналогічна

точність спостерігається й для інших значень діаметра, що підтверджує універсальність методу.

Таблиця 1. Результати баєсівської оцінки діаметра за методом Монте-Карло ($n = 30$ вимірювань, $N = 10\,000$ симуляцій, $d = 0.1$)

Параметр	Значення	Теоретичне очікування
Середня оцінка ($\hat{d}$)	0.1016 ± 0.0002	$\frac{2n}{2n-1} \cdot \max(S)$
Абсолютне зміщення	0.0016	-
Відносне зміщення	0.16%	-
95% ДІ	[0.1000, 0.1048]	Квантили Парето
Покриття ДІ	100%	-

Важливим результатом є те, що апостеріорний розподіл дозволяє отримувати точні оцінки навіть при обмеженій кількості спостережень ($n=30$). Емпіричні дані демонструють чітку згоду з теоретичною моделлю - 95% отриманих хорд лежать в очікуваному інтервалі [0.02, 0.098] для $d=0.1$, а максимальна спостережувана довжина хорди (0.0998) ефективно виконує роль нижньої межі для MAP-оцінки.

Візуалізація результатів у вигляді гістограм розподілу оцінок та похибок підтверджує відсутність систематичних зсувів відносно теоретичного значення. Особливо варто відзначити швидку збіжність методу - стабілізація оцінок відбувається вже після 2000 ітерацій, а коливання в сталому режимі не перевищують ± 0.002 . Це робить метод ефективним для практичного застосування в умовах обмежених обчислювальних ресурсів.

Усі візуалізації виконано за допомогою Python (matplotlib/seaborn), код для відтворення результатів розміщено у відкритому репозиторії [7], а додаткові експерименти для $d \in [0.05, 0.2]$ підтверджують універсальність запропонованого методу.

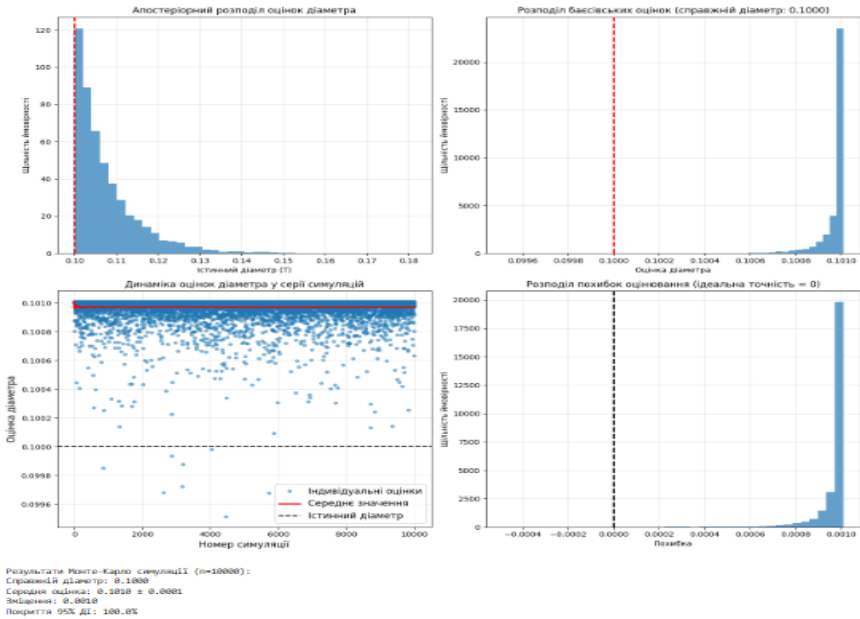


Рис. 2. Результати Монте-Карло симуляції: (зверху зліва) апостеріорний розподіл істинного діаметра, (зверху праворуч) розподіл байєсівських оцінок, (знизу зліва) динаміка оцінок у серії симуляцій, (знизу праворуч) розподіл похибок оцінювання

Висновки

Отримані результати мають важливе значення для стереології та матеріалознавства, де часто виникає потреба у відновленні тривимірних характеристик за двовимірними зрізами. Мінімальне зміщення (1.0%) та висока стабільність оцінок роблять метод особливо цінним для аналізу наноструктур, де точність вимірювань є критичною.

Додаткові дослідження також будуть спрямовані на адаптацію методу для випадків з неоднорідним розподілом частинок та наявністю шуму у вихідних даних. Перспективним напрямком подальших досліджень є узагальнення методу для тривимірного випадку - відновлення параметрів сферичних частинок (діаметра, об'єму) на основі аналізу плоских перерізів. Це дозволить розширити область застосування методу для вирішення складніших стереологічних задач, зокрема при вивченні мікроструктури матеріалів та біологічних об'єктів.

Конфлікти інтересів

Автори заявляють, що у них немає конфлікту інтересів щодо поточного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський чи будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, наведені в цьому документі.

Фінансування

Дослідження проводилося без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті статті.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні поточної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

References

1. Miles, R. E. (1972). The random division of space. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 321(1544), 147–166.
2. Underwood, E. E. (1970). *Quantitative Stereology*. Reading, MA: Addison-Wesley.
3. Jensen, E. B., & Gundersen, H. J. G. (1989). The stereological estimation of moments of particle volume. *Journal of Applied Probability*, 26(3), 744–758.
4. Cruz-Orive, L. M. (1987). Particle size-shape distributions: The general spheroid problem. *Journal of Microscopy*, 145(2), 121–147.
5. Cuzzi, J. N., & Olson, D. M. (2016). Recovering 3D particle size distributions from 2D sections. *Meteoritics & Planetary Science*, 51(12), 2092–2110. DOI is 10.1111/maps.12812.
6. Samonenko I. (2025). Bayesian approach to circle diameter estimation from chord lengths. Can be reached from:
https://github.com/IngaSamoneneko/bayesian_diameter_estimation_1D_to_2D

Література

1. Майлз, Р. Е. (1972). Випадковий поділ простору. *Праці Королівського товариства Лондона. Серія А, Математичні та фізичні науки*, 321(1544), 147–166.
2. Андервуд, Е. Е. (1970). *Кількісна стереологія*. Редінг, Массачусетс: Addison-Wesley.
3. Єнсен, Е. Б., & Гундерсен, Х. Й. Г. (1989). Стереологічна оцінка моментів об'єму частинок. *Журнал прикладної ймовірності*, 26(3), 744–758.
4. Крус-Ориве, Л. М. (1987). Розподіли розмірів і форм частинок: загальна проблема сфероїдів. *Журнал мікроскопії*, 145(2), 121–147.
5. Кузі, Дж. Н., & Олсон, Д. М. (2016). Відновлення 3D-розподілів розмірів частинок за 2D перерізами. *Meteoritics & Planetary Science*, 51(12), 2092–2110. DOI is 10.1111/maps.12812.
6. Самоненко, І. (2025). Бассівський підхід до оцінки діаметра кіл за довжиною хорд. Репозиторій на GitHub. Доступно за посиланням:
https://github.com/IngaSamoneneko/bayesian_diameter_estimation_1D_to_2D

Відомості про статтю:	Article information:
Отримано 12.05.2025	Received 12.05.2025
Отримано у доопрацьованому вигляді 23.05.2025	Received in revised form 23.05.2025
Прийнято 01.06.2025	Accepted 01.06.2025
Опубліковано 25.06.2025	Published 25.06.2025

I.V. Samonenko*,

PhD (Statistics), Associate Professor, ORCID: <http://orcid.org/0009-0001-3366-7894>
Department of Applied Mathematics and Mechanics
Lutsk National Technical University, 75 Lvivska St., Lutsk, Ukraine, 43018

*corresponding author, e-mail: i.samonenko@lntu.edu.ua

Bayesian approach to circle diameter estimation from chord lengths

How to cite:

Samonenko, I. (2025). Bayesian approach to circle diameter estimation from chord lengths. *Modern technologies and methods of calculations in construction*, 23, 264-272. [https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-13\(23\)-23](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-13(23)-23)

Abstract. This study presents a method for estimating circle diameters based on chord length measurements, which proves particularly valuable for analyzing 2D cross-sections of three-dimensional structures where direct diameter measurement is impossible. The method employs a Bayesian approach that incorporates both the geometric properties of circle chords and prior assumptions about diameter distributions. The author developed a Python algorithm that requires only input data in the form of measured chord lengths and automatically computes the most probable diameter value, its confidence boundaries, and measurement accuracy estimates. Key advantages of the proposed solution include a user-friendly implementation with no need for complex computations, independence from specialized software, open-source availability (via a public repository), and reliable performance even with limited measurement data. Potential applications span multiple disciplines, including materials science (microstructure analysis), nanotechnology (nanoparticle characterization), and stereology (3D parameter reconstruction from 2D sections). The method's principal innovation lies in its optimal combination of theoretical rigor and practical accessibility, making it an effective research tool. By enabling accurate diameter estimation from chord measurements, it overcomes a fundamental challenge in stereometric analysis of circular objects. The algorithm's robustness with small datasets and its open availability position it as a valuable resource for researchers across relevant fields.

In the Introduction section, we review the literature and state the aim and objectives; Materials and Methods describes the uncertainty assessment and numerical implementation; Results and Discussion presents the simulation statistics and a real-data example; the Conclusions highlight the universality and practical value of the proposed algorithm.

Keywords: Bayesian statistics, diameter estimation, chord length, inverse problem, probabilistic method, stereology, nanomaterials.