

УДК 539.3

**О.Г. Бондарський\***

к.т.н., доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4624-8485>

Кафедра прикладної математики та механіки

Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, Луцьк, Україна, 43018

**О.А. Ужегова**

к.т.н., доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2352-2907>

Кафедра будівництва та цивільної інженерії

Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, Луцьк, Україна, 43018

**С.Я. Дробишинець**

к.т.н., доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9060-7716>

Кафедра будівництва та цивільної інженерії

Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, Луцьк, Україна, 43018

**В.Є. Денейчук**

Аспірант

Кафедра прикладної математики та механіки

Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, Луцьк, Україна, 43018

**В.І. Формазюк**

Студент

Кафедра будівництва та цивільної інженерії

Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, Луцьк, Україна, 43018

\*автор-кореспондент, e-mail: bondarskij22@ukr.net

## **Моделювання та розрахунок тришарової складеної оболонки типу “конус-циліндр-конус”**

Цитувати як:

Бондарський О.Г., Ужегова О.А., Дробишинець С.Я., Денейчук В.Є., Формазюк В.І. (2025). Моделювання та розрахунок складеної оболонки типу “конус-циліндр-конус”. *Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві*, 23, 66-74. [https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-13\(23\)-07](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-13(23)-07)

© 2025, Бондарський О.Г., Ужегова О.А., Дробишинець С.Я., Денейчук В.Є., Формазюк В.І.

*Анотація. У статті наведено результати розрахунку багатошарової конструкції типу “конус-циліндр-конус”, яка знаходиться під дією силового та температурного навантаження. Багатошарові конструкції та системи із них широко застосовуються в різних галузях, де потрібне поєднання кількох властивостей – наприклад, міцності, теплоізоляції, звукоізоляції, стійкості до вологи, вогню тощо. Основними сферами їх використання є будівництво, промисловість, автомобілебудування та авіація, військова та космічна техніка. Розрахунок багатошарових конструкцій має ряд особливостей, що відрізняє його від одношарових систем, оскільки потрібно враховувати взаємодію шарів, їхні фізико-механічні властивості та фундаментальне призначення. Такий розрахунок вимагає урахування анізотропії, міжшарової взаємодії, теплових та механічних навантажень. Для цього створюються складні моделі які дають можливість точніше прогнозувати поведінку та довговічність конструкції. Існує кілька*

теоретичних підходів до розрахунку багатошарових конструкцій, і вибір теорії залежить від типу конструкції, її товщини, типу навантаження, а також від необхідної точності.

В основу дослідження покладений варіант кінцево-зсувної теорії розрахунку багатошарових пластин та оболонок з урахуванням температури в гіпотезах для поперечних дотичних напружень. На першому етапі дослідження розв'язувалася задача стаціонарної теплопровідності багатошарової оболонки в якій застосована гіпотеза щодо розподілу температури по товщині багатошарового пакету. На основі отриманих характеристик температурного поля, розв'язувалася задача термопружної рівноваги складеної оболонки. Отримані крайові задачі теплопровідності і термопружної рівноваги реалізувалися методом дискретної ортогоналізації.

Як впливає із побудованих графіків, прогини і напруження, які виникають при дії температурного поля, в 4-20 разів перевищують аналогічні величини, які отримані при силовому навантаженні. Це свідчить про те, що визначальним фактором напружено-деформованого стану складеної оболонки є температурний вплив.

*Ключові слова:* багатошарові конструкції, складені оболонки, кінцево-зсувна теорія багатошарових пластин та оболонок

## Вступ

**Аналіз літературних джерел та постановка проблеми.** Багатошарові конструкції та системи із них широко застосовуються в різних галузях, де потрібне поєднання кількох властивостей – наприклад, міцності, теплоізоляції, звукоізоляції, стійкості до вологи, вогню тощо. Основними сферами їх використання є будівництво, промисловість, автомобілебудування та авіація, військова та космічна техніка [1,2].

Розрахунок багатошарових конструкцій має ряд особливостей, що відрізняє його від одношарових систем, оскільки потрібно враховувати взаємодію шарів, їхні фізико-механічні властивості та фундаментальне призначення [3,4].

Такий розрахунок вимагає урахування анізотропії, міжшарової взаємодії, теплових та механічних навантажень. Для цього створюються складні моделі які дають можливість точніше прогнозувати поведінку та довговічність конструкції [5,6].

Існує кілька теоретичних підходів до розрахунку багатошарових конструкцій, і вибір теорії залежить від типу конструкції (плита, оболонка, балка, пластина), її товщини, типу навантаження (механічне, теплове тощо), а також від необхідної точності [7,8].

Класична теорія пластин і оболонок, яка заснована на припущенні, що нормалі до середньої поверхні залишаються прямими і перпендикулярними після деформації, має суттєве обмеження.

Вона працює добре лише для тонких одношарових конструкцій і може бути застосована для розрахунку тонких пластин та простих одношарових оболонок.

Тому для багатошарових конструкцій необхідно застосовувати уточнені теорії з урахуванням поперечного зсуву, міжшарових взаємодій, неоднорідності матеріалу по товщині та умов контакту між шарами [9,10].

**Мета і завдання дослідження.** Метою та завданням дослідження є розрахунок складеної конструкції типу “конус-циліндр-конус” на силові та теплові навантаження. Така геометрична форма оболонки часто використовується там, де потрібна аеродинамічна обтічність, міцність або ефективне використання простору. Це аерокосмічна техніка, авіація, суднобудування, наземні системи і також наукове обладнання. Перевагами такої форми оболонки є її гарна обтічність, оптимальний розподіл напружень і простота виготовлення.

### Матеріали та методи

В основу дослідження покладений варіант кінцево-зсувної теорії розрахунку багатошарових пластин та оболонок з урахуванням температури в гіпотезах для поперечних дотичних напружень. На першому етапі дослідження розв’язувалася задача стаціонарної теплопровідності багатошарової оболонки в якій застосована гіпотеза щодо розподілу температури по товщині багатошарового пакету. На основі отриманих характеристик температурного поля розв’язувалася задача термопружної рівноваги складеної оболонки. Отримані крайові задачі теплопровідності і термопружної рівноваги реалізувалися методом дискретної ортогоналізації [5,6].

### Результати та обговорення

Об’єктом розрахунку є конструкція мобільної споруди, яка являє собою тришарову складену оболонку типу “конус-циліндр-конус” (Рис.1).

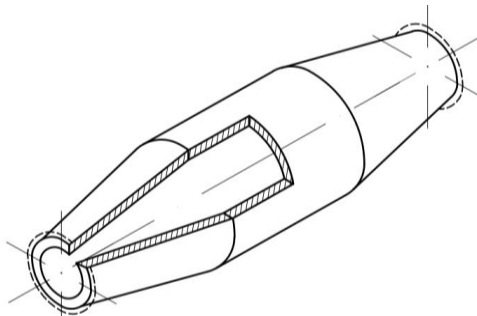


Рис. 1. Схема складеної оболонки

Такого типу мобільні споруди використовуються у сферах, де така форма обґрунтована аеродинамічними, технологічними або логістичними міркуваннями. Така геометрія зустрічається в мобільних аерокосмічних установках, аеродинамічних стендах, в мобільних капсулах. Часто такі конструкції підлягають впливу нерівномірного температурного поля.

Геометричні розміри і будова оболонки по товщині показані на рис.2.

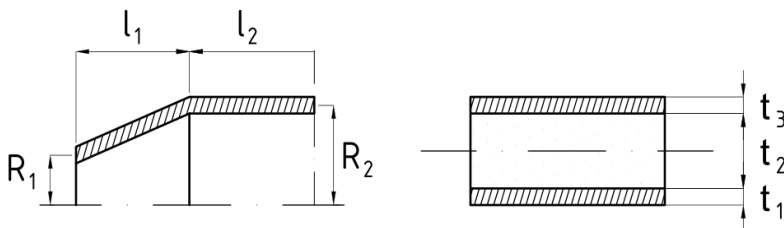


Рис. 2. Будова та геометричні розміри оболонки

Оболонка має наступні геометричні характеристики: довжина конічних частин  $l_1 = l_3 = 1,5$  м; довжина циліндричної частини  $l_2 = 3$  м; менший радіус конуса  $R_1 = 1,4$  м, радіус циліндра  $R_2 = 1,6$  м; товщина несучих шарів  $t_1 = t_3 = t_n = 0,002$  м, заповнювача -  $t_2 = t_{\text{зап}} = 0,08$  м. Несучі шари виконані з алюмінієвого сплаву з характеристиками: модуль пружності  $E_n = 0,7 \cdot 10^5$  МПа, модуль зсуву  $G_n = 0,27 \cdot 10^5$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu_n = 0,3$ , коефіцієнт теплопровідності  $\lambda = 163$  Вт/(м·К); коефіцієнт лінійного теплового розширення  $\alpha_n = 23 \cdot 10^{-6}$  1/К. В якості заповнювача був використаний пінопласт:  $E_{\text{зап}} = 200$  МПа,  $G_{\text{зап}} = 77$  МПа,  $\nu_{\text{зап}} = 0,3$ ,  $\lambda = 0,058$  Вт/(м·К),  $\alpha_{\text{зап}} = 0$ . Оболонка перебуває під впливом температурного поля і рівномірно розподіленого по всій поверхні навантаження інтенсивністю  $q = 0,01$  МПа.

На рис. 3 показаний розподіл температури відповідно на зовнішній і внутрішній поверхнях оболонки, а також рівномірно розподілене навантаження.

З урахуванням симетрії задача розв'язувалася для інтервалу  $0 \leq x \leq L/2$  при умові симетрії в точці  $x_1 = L/2$ . На рис. 4,5 представлені епюри радіальних переміщень  $U_z$ , меридіональних напружень  $\sigma_{11}^+$  і окружних  $\sigma_{22}^+$ , які побудовані для двох меридіональних січень оболонки (на рис. 3 точки А і Б).

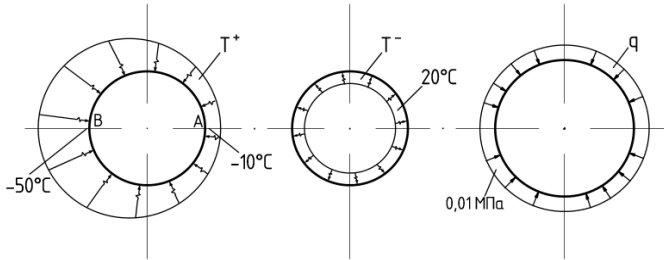


Рис. 3. Розподіл температури та навантаження на поверхнях оболонки

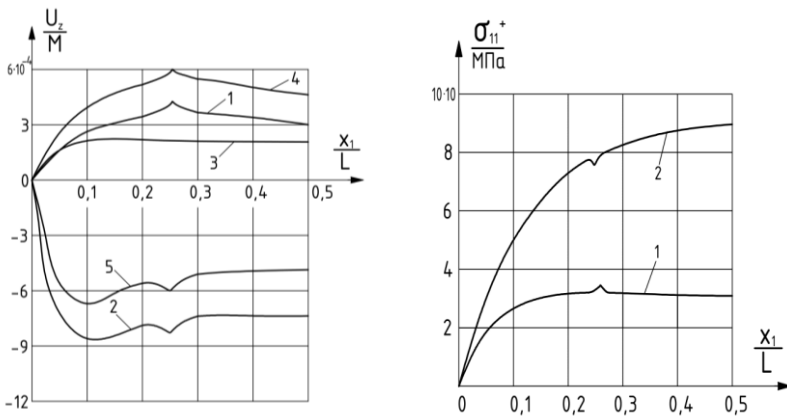


Рис. 4. Епюри переміщень  $U_z$  та меридіональних напружень  $\sigma_{11}^+$

На рисунках 4,5 цифрами 1 і 2 позначені епюри характеристик напружено-деформованого стану, які побудовані відповідно для січень А і Б при температурному навантаженні; цифрою 3 - епюри при силовому навантаженні; цифрою 4 - при одночасній дії температури і силового навантаження для січення А, цифрою 5 - те ж саме навантаження для січення Б.

Аналіз отриманих результатів показує, що переміщення  $U_z$  (рис. 4) для 1, 3, 4 випадків зовнішнього навантаження мають додатні значення, а для випадків 2 і 5 - від'ємні значення. При цьому абсолютні максимальні значення  $U_z$  досягаються при температурному впливі у січнні Б. Найбільші значення меридіональних напружень  $\sigma_{11}^+$  мають місце для температурного навантаження у січнні Б (рис. 4). Окружні напруження  $\sigma_{22}^+$  (рис. 5) при всіх сполученнях навантажень є додатними і досягають максимуму в січнні Б для навантаження виду 5.

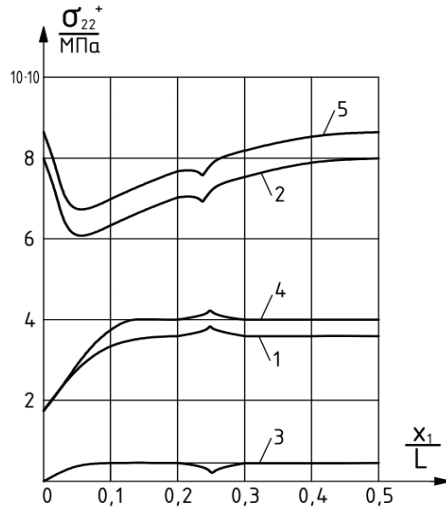


Рис. 5. Епюри окружних напружень  $\sigma_{22}^+$

### Висновки

Як випливає із графіків, прогини і напруження, які виникають при дії температурного поля в 4-20 разів перевищують аналогічні величини, які отримані при силовому навантаженні. Це свідчить про те, що визначальним фактором напружено-деформованого стану складеної оболонки є температурний вплив.

### Конфлікти інтересів

Автори заявляють, що у них немає конфлікту інтересів щодо поточного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський чи будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, наведені в цьому документі.

### Фінансування

Дослідження проводилося без фінансової підтримки.

### Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті статті.

### Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні поточної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

### References

1. Grigorenko Ya.M., Vasylenko A.T., Pankratova N.D. Statics of anisotropic thin-walled shells. Kyiv: Higher School. 1985. – 189 p.
2. Rasskazov O.O., Sokolovska I.I., Shulga M.A. Theory and calculation of layered orthotropic plates and shells. Kyiv: Higher School. 1986. – 191 p.
3. Grigorenko Ya.M., Vasylenko A.T., Pankratova N.D. To the solution of the stress state of thick-walled inhomogeneous shells. – Applied Mechanics, 1974, Vol 10, No.5, pp. 86-93
4. Pasichnyk R., Pasichnyk O., Uzhegova O., Andriichuk O., Bondarskii O. Calculation Optimization of Complex Shape Shells by Numerical Method. In: Ivanov V. et al. Advances in Design, Simulation and Manufacturing II. DSMIE 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. pp. 643-652. DOI:10.1007/978-3-030-22365-6\_64. Online ISBN 978-3-030-22365-6.
5. Pankratova N.D., Rasskazov A.O., Bondar A.G., Bondarskii A.G. Thermostress state of shear-pliable multilayer orthotropic shells and plates Soviet Applied Mechanics, 1987, 23(7), pp. 658–663
6. Bondar A.G., Rasskazov A.O., Kozlov V.I., Bondarskii A.G. Thermoelastic equilibrium of multilayered composite shells. Strength of Materials. This link is disabled., 1989, 21(6), pp. 784–789.
7. Bondarsky O.G., Babkov O.V. Influence of thermal sensitivity of layer material on the stress-strain state of multilayer shells and plates // Modern technologies and calculation methods in construction: Collection of scientific works – Lutsk: Lutsk National Technical University, 2021. – Issue 16. – P. 20-25.
8. Bondarsky O.G., Babkov O.V., Kosenko V.I. Methodology for numerical solution of boundary value problems of statics of multilayer structure systems. // Interuniversity collection "Scientific notes". – Issue №33. – 2011. – P. 50–52.
9. Bondarsky O.G., Uzhegova O.A. Modeling and research of thermoelastic state of three-layer composite shell // Modern technologies and calculation methods in construction: Collection of scientific works – Lutsk: Lutsk National Technical University, 2022. – Issue 18. – P. 34-39. [https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2022-8\(18\)-04](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2022-8(18)-04)
10. Trach V.M., Podvorni A.V., Zhukova N.B., Bondarskyi O.G. Free vibrations of layered anisotropic thick-walled cylindrical shells // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – Kyiv: KNUBA, 2024. – Issue 113. – P. 250-264. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2024.113.250-264>

### Література

1. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Статика анізотропних тонкостінних оболонок. Київ: Вища школа. 1985. – 189 с.
2. Рассказов О.О., Соколовська І.І., Шульга М.А. Теорія і розрахунок шаруватих ортотропних пластин і оболонок. Київ: Вища школа. 1986. – 191 с.
3. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. До розв'язку напруженого стану товстостінних неоднорідних оболонок. – Прикладна механіка, 1974, Т.10, №5, С. 86-93
4. Pasichnyk R., Pasichnyk O., Uzhegova O., Andriichuk O., Bondarskii O. Calculation Optimization of Complex Shape Shells by Numerical Method. In: Ivanov V. et al. Advances in Design, Simulation and Manufacturing II. DSMIE 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. Pp 643-652. DOI:10.1007/978-3-030-22365-6\_64. Online ISBN 978-3-030-22365-6.

5. Pankratova N.D., Rasskazov A.O., Bondar A.G., Bondarskii A.G. Thermostress state of shear-pliable multilayer orthotropic shells and plates Soviet Applied Mechanics, 1987, 23(7), pp. 658–663

6. Bondar A.G., Rasskazov A.O., Kozlov V.I., Bondarskii A.G. Thermoelastic equilibrium of multilayered composite shells. Strength of Materials. This link is disabled., 1989, 21(6), pp. 784–789

7. Бондарський О.Г., Бабков О.В. Вплив термочутливості матеріалу шарів на напружено-деформований стан багатошарових оболонок і пластин // Сучасні технології та методи розрахунків в будівництві: Зб. наук. праць – Луцьк: Луцький НТУ, 2021. – Вип.. 16. – С. 20-25.

8. Бондарський О.Г., Бабков О.В., Косенко В.І. Методика чисельного розв'язання крайових задач статки систем багатошарової структури. // Міжвузівський збірник "Наукові нотатки". – Випуск №33. – 2011. – С. 50–52

9. Бондарський О.Г., Ужегова О.А. Моделювання та дослідження термопружного стану тришарової складеної оболонки // Сучасні технології та методи розрахунків в будівництві: Зб. наук. праць – Луцьк: Луцький НТУ, 2022. – Вип. 18. – С. 34-39. [https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2022-8\(18\)-04](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2022-8(18)-04)

10. Trach V.M., Podvornyi A.V., Zhukova N.B., Bondarskyi O.G. Free vibrations of layered anisotropic thick-walled cylindrical shells // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – Kyiv: KNUBA, 2024. – Issue 113. – P. 250-264. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2024.113.250-264>

| Відомості про статтю:                         | Article information:                |
|-----------------------------------------------|-------------------------------------|
| Отримано 19.05.2025                           | Received 19.05.2025                 |
| Отримано у доопрацьованому вигляді 25.05.2025 | Received in revised form 25.05.2025 |
| Прийнято 01.06.2025                           | Accepted 01.06.2025                 |
| Опубліковано 25.06.2025                       | Published 25.06.2025                |

### **O.G. Bondarskyi\***

Ph.D., Associate Professor, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4624-8485>  
Department of Applied Mathematics and Mechanics  
Lutsk National Technical University, Lvivska St., 75, Lutsk, Ukraine, 43018

### **O.A. Uzhegova**

Ph.D., Associate Professor, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2352-2907>  
Department of Construction and Civil Engineering  
Lutsk National Technical University, Lvivska St., 75, Lutsk, Ukraine, 43018

### **S.Y. Drobyshynets**

Ph.D., Associate Professor, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9060-7716>  
Department of Construction and Civil Engineering  
Lutsk National Technical University, Lvivska St., 75, Lutsk, Ukraine, 43018

### **V.E. Deneychuk**

Postgraduate student  
Department of Applied Mathematics and Mechanics  
Lutsk National Technical University, Lvivska St., 75, Lutsk, Ukraine, 43018

### **V.I. Formazyuk**

Student  
Department of Industrial and Civil Engineering  
Lutsk National Technical University, Lvivska St., 75, Lutsk, Ukraine, 43018

\*corresponding author, e-mail: bondarskij22@ukr.net

## Modeling and calculation of a three-layer composite shell of the “cone-cylinder-cone” type

Cite as:

Bondarskyi O.G., Uzhegova O.A., Drobyshtynets S.Y., Deneychuk V.E., Formazyuk V.I. (2025). Modeling and calculation of a composite shell of the “cone-cylinder-cone” type. Modern technologies and calculation methods in construction, 23, 66-74. [https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-13\(23\)-07](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-13(23)-07)

*Abstract. The article presents the results of calculating a multilayer structure of the “cone-cylinder-cone” type under the action of force and temperature loads. Multilayer structures and systems made of them are widely used in various industries where a combination of several properties is required – for example, strength, thermal insulation, sound insulation, resistance to moisture, fire, etc. The main areas of their use are construction, industry, automotive and aviation, military, and space technology. The calculation of multilayer structures has several features that distinguish it from single-layer systems, since it is necessary to take into account the interaction of layers, their physical and mechanical properties, and fundamental purpose. Such a calculation requires taking into account anisotropy, interlayer interaction, thermal, and mechanical loads. For this purpose, complex models are created that make it possible to more accurately predict the behavior and durability of the structure. There are several theoretical approaches to the calculation of multilayer structures, and the choice of theory depends on the type of structure, its thickness, type of load, as well as the required accuracy.*

*The research is based on a variant of the finite-shear theory of calculation of multilayer plates and shells, taking into account temperature in hypotheses for transverse tangential stresses. At the first stage of the research, the problem of stationary thermal conductivity of a multilayer shell was solved, in which the hypothesis of temperature distribution over the thickness of the multilayer package was applied. Based on the obtained characteristics of the temperature field, the problem of thermoelastic equilibrium of a composite shell was solved. The obtained boundary value problems of thermal conductivity and thermoelastic equilibrium were implemented by the method of discrete orthogonalization.*

*As follows from the constructed graphs, the deflections and stresses that arise under the action of a temperature field are 4-20 times higher than the similar values obtained under force loading. This indicates that the temperature effect is the determining factor of the stress-strain state of a composite shell.*

**Keywords:** multilayer structures, composite shells, finite-shear theory of multilayer plates and shells.