https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2024-12(22)-07

УДК 531.31:632.548

Аналітичні розв'язки спрощених рівнянь руху у задачах балістики матеріальної точки

Analytical solutions of simplified equations of motion in ballistic problems of a material point

Задорожний А.О., к.т.н., доц. (Військовий інститут танкових військ НУ «Харківський політехнічний інститут»), Човнюк Ю.В., к.т.н., доц, (Київській національний університет будівництва і архітектури, м. Київ), Стаховський О.В., д.т.н. проф. (Національний університет оборони України, м. Київ), Чередніченко П.П., доц., Остапущенко О.П., к.т.н., доц. (Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ)

Zadorozhny Andrey, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor (National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv), Chovnyuk Yurii, Ph.D., Associate Professor (Kyiv National University of Construction and Architecture), Stakhovsky Oleh, Doctor of Engineering, Professor (National University of Defense of Ukraine, Kyiv), Cherednichenko Petro, Associate Professor, Ostapushchenko Olga, Ph.D, Associate Professor (Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv)

У роботі обгрунтоване застосування спеціальної функції Ламберта для розв'язку задач балістики матеріальної точки із урахуванням опору газоподібного (повітряного) середовища. Наведені аналітичні розв'язки спрощених рівнянь руху для пологих і крутих (відносно горизонту) траєкторій. Для розрахунку пологої (настильної) траєкторії польоту проведений порівняльний аналіз результатів, отриманих за допомогою функції Ламберта, з класичними, отриманими Дідіоном. Для випадку крутих (відносно горизонту) траєкторій польоту матеріальної точки вперше отримані аналітичні розв'язки задачі зовнішньої балістики у квадратурах. Отримані у роботі результати можуть бути використані для уточнення і вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку траєкторій руху та основних його характеристик у задачах зовнішньої балістики матеріальної точки, коли враховується нелінійний (пропорційний квадрату швидкості руху) опір середовища, у задачах сучасного будівельного виробництва, які описують процеси торкретування бетонних сумішей, а також задля ідентифікації основних параметрів руху, зокрема, коефіцієнта парусності.

The paper substantiates the application of Lambert's special function for solving ballistic problems of a material point taking into account the resistance of gaseous (air) medium. Analytical solutions of simplified equations of motion for gentle and steep (relative to the horizon) trajectories are given. A comparative analysis of the results obtained using the Lambert function with the classical results obtained by Didion is carried out for the calculation of a hollow (hovering) flight trajectory. For the case of steep (relative to the horizon) flight trajectories of a material point, analytical solutions of the problem of external ballistics in quadrature have been obtained for the first time. The results obtained in this paper can be used to refine and improve the existing engineering methods for calculating the trajectories of motion and its main characteristics in the problems of external ballistics of a material point, when the nonlinear (proportional to the square of the velocity of motion) resistance of the medium is taken into account, in the problems of modern construction production, describing the processes of shotcrete concrete mixtures, as well as for the identification of the main parameters of motion, in particular, the coefficient of sailing.

Ключові слова: аналітика, розв'язки, рівняння руху, балістика, матеріальна точка.
Keywords: analytics, solutions, equations of motion, ballistics, material point.

Постановка проблеми. При швидкостях руху частинки, які співвимірні чи перевищують її швидкість витання, теорія квадратичного опору найкращим чином узгоджується з дослідами [1], ніж теорія лінійного опору. У зв'язку з цим, у даному дослідженні розглянуті задачі балістики матеріальної точки, коли сила опору газоподібного середовища пропорційна квадрату швидкості руху точки.

При визначенні сили опору середовища розповсюджені два способи. У першому способі її обчислюють за формулою:

$$R_{\text{оп}} = K \cdot mv^2 , \tag{1}$$

де: m − маса рухомої точки; v − швидкість руху; K − коефіцієнт парусності; $[K]$= м$^{-1}$. Останній пов'язаний зі швидкістю витання частинки $v_{\text{в}}$ співвідношенням:

$$K = \frac{g}{v_{\text{в}}^2} , \tag{2}$$

де: g − прискорення вільного падіння.

При визначенні $R_{\text{оп}}$ другим способом приймають:

$$R_{\text{оп}} = K_1 \cdot S \cdot v^2, \tag{3}$$

де: S − площа поперечного перерізу частинки (мідель), перпендикулярна вектору швидкості $\vec{v}$; K_1 − розмірний коефіцієнт пропорційності. Згідно з дослідами Ейфеля, у системі СІ, K_1=0,24 кг·м$^{-3}$.

У подальшому в даному дослідженні $R_{\text{оп}}$ буде обчислюватись першим способом, пов'язуючи силу аеродинамічного опору з коефіцієнтом парусності.

Існують різні способи отримання інтегральних представлень координат на траєкторії руху матеріальної точки [2-4].

Необхідно розв'язати систему нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \ddot{x} + K\dot{x}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{1/2} = 0; \\ \ddot{y} + K\dot{y}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{1/2} = -g, \end{cases} \tag{4}$$

яка записана у прямокутній системі координат X0Y й описує траєкторію руху частинки.

Систему (4) слід доповнити початковими умовами:

$$x(0) = y(0) = 0;\ \dot{x}(0) = v_0 \cos\theta_0;\ \dot{y}(0) = v_0 \sin\theta_0. \tag{5}$$

Інтегральне представлення координат точок траєкторії руху [1, 4] має вигляд:

$$x = -\frac{1}{K}\cdot\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{f(0)\cos^2\theta};\ y = -\frac{1}{K}\cdot\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\sin\theta d\theta}{f(\theta)\cos^3\theta}. \tag{6}$$

Тут:

$$\begin{cases} f(\theta) = \lambda + \dfrac{\sin\theta_0}{\cos^2\theta_0} + \ln\left\{\dfrac{1+\sin\theta_0}{\cos\theta_0}\right\} - \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \ln\left\{\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right\}; \\ \lambda = \dfrac{g}{K\left(v_0\cos\theta_0\right)^2};\ 0 \le \theta_0 < \dfrac{\pi}{2};\ -\dfrac{\pi}{2} < \theta \le \theta_0. \end{cases} \tag{7}$$

Інтеграли (6) не вдається подати аналітично через елементарні функції, але їх чисельне інтегрування не викликає ніяких труднощів. Задля проведення балістичних розрахунків у [1] створені скорочені таблиці інтегралів (6), які дозволяють визначати дальність прольоту частинки у горизонтальному напрямку при умові рівності ординат початкової та кінцевої точок траєкторії, а також при горизонтальному вильоті частинки з наступним її падінням на задану висоту. У [2] описана процедура застосування спеціальних таблиць інтегралів (6), проте без конкретних обчислень, оскільки такі таблиці у цитованому джерелі літератури відсутні.

Розглянемо у подальшому аналітичні розв'язки задач балістики матеріальної точки для різних варіантів траєкторії її руху.

1. Розрахунок пологої (настильної) траєкторії польоту: розв'язок Дідіона та його інверсія за допомогою функції Ламберта

Для розрахунку пологої (настильної) траєкторії польоту Дідіон [5, 6] побудував наближений розв'язок системи (4), за початкових умов (5), у елементарних функціях, визначивши у явному вигляді залежність $y = y(x)$. Проте, її для розрахунку дальності польоту частинки x_* використати важко, оскільки необхідно чисельно розв'язувати трансцедентне рівняння $y_* = y(x_*)$ за заданого значення y_*. Тому для спрощення розрахунків бажано мати явну аналітичну залежність $x = x(y)$, обернену до тієї, яку запропонував Дідіон. Обернена залежність є неоднозначною й не виражається у елементарних функціях. Задля інверсії розв'язку Дідіона необхідно використати функцію Ламберта [1]. Тоді визначення x_* зведеться до знаходження значення функції Ламберта за таблицями, поданими у [1], або ж за допомогою її обчислення на ПЕОМ у середовищі «Maple» [7].

Вважаючи силу опору повітря пропорційною квадрату швидкості руху точки вподовж настильної траєкторії ($\theta \le 15^\circ$), Дідіон знайшов залежність $y(x)$ у вигляді [6]:

$$y = y(x) = \frac{v_2}{v_1} \cdot x - \frac{g}{(2K\gamma v_1)^2} \cdot \left\{ \exp(2K\gamma x) - 2K\gamma x - 1 \right\}. \tag{8}$$

Тут $v_1 = v_0 \cos\theta_0$; $v_2 = v_0 \sin\theta_0$ − проєкції вектора початкової швидкості точки $\vec{v}_0$ на вісь $0x$ та $0y$; K − коефіцієнт парусності частинки; γ − постійний множник, близький до одиниці (згідно з [6] $\gamma = 1,017$, а у Дідіона $\gamma = 1,012$).

У [1] побудована залежність $x = x(y)$, зворотна до (8). При цьому, для створення інверсії розв'язку Дідіона, використана функція Ламберта, основні відомості про яку подані нижче.

Спеціальна функція, яка розглянута нижче, використовувалась ще у роботі Л.Ейлера у 1779 р., але не мала самостійного значення аж до 80-х років XX століття. Як самостійна функція була введена у системі комп'ютерної алгебри Maple й названа ім'ям Lambert W. Ім'я Іоганна Генріха Ламберта було обрано тому, що Л.Ейлер робив посилання у своїй роботі на праці Ламберта.

Використання згаданої вище функції дозволяє вирішувати аналітично деякі трансцедентні рівняння, тобто будувати інверсії низки відомих рішень у задачах балістики матеріальної точки. Ці інверсії виявляються зручними для розрахунку дальності польоту матеріальної точки та основних параметрів траєкторії її руху.

Функція Ламберта $W\left(\xi\right)$ задовольняє рівнянню:

$$W\left(\xi\right)\cdot\exp\left[W\left(\xi\right)\right]=\xi\,. \tag{9}$$

Якщо рівняння (9) прологарифмувати, тоді маємо при $\xi>0$ й $W\left(\xi\right)>0$:

$$\ln W\left(\xi\right)+W\left(\xi\right)=\ln\xi\,. \tag{10}$$

Тому, якщо $f>0$ й:

$$\ln f+f=x=\ln\left(e^{x}\right), \tag{11}$$

тоді:

$$f=W\left(e^{x}\right)>0\,. \tag{12}$$

Аналогічно, якщо $f>0$ й:

$$f-\ln f=x\,, \tag{13}$$

тоді

$$f=-W\left(-e^{-x}\right). \tag{14}$$

У цьому випадку аргумент функції Ламберта від'ємний. На проміжку $x\in\left[-e^{-1},\,0\right]$ $W\left(x\right)$ має дві гілки дійсних від'ємних значень. У подальшому їх будемо позначати через $W_1\left(x\right)$ − головна гілка й $W_2\left(x\right)$ − допоміжна гілка. Ці гілки стикуються при $x=-e^{-1}$. У цій точці $W_1\left(-e^{-1}\right)=W_2\left(-e^{-1}\right)=-1$. Зі зростанням x $W_1\left(x\right)$ зростає, а $W_2\left(x\right)$ спадає. У області $x>0$ $W\left(x\right)$ має додатні значення, причому $W\left(0\right)=0$, а $W\left(e\right)=1$

У роботі [1] наведені таблиці значень $W_1(-\xi)$, $W_2(-\xi)$ й $W(\xi)$ при $\xi \ge 0$.

Розклад функції Ламберта у степеневий ряд має вигляд [8]:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1} \cdot x^n}{n!}. \tag{15}$$

Цей ряд збігається на проміжку $x \in \left(-\frac{1}{e};\ \frac{1}{e}\right]$, причому у області від'ємних x розклад дає $W_1(x)$.

При великих x виконується асимптотика [9]:

$$W(x) \approx P - Q + \frac{Q}{P} + \frac{Q\cdot(Q-2)}{2P^2} + \frac{Q\cdot\left(2Q^2 - 9Q + 6\right)}{6P^3} + \\ + \frac{Q\cdot\left(3Q^3 - 22Q^2 + 36Q - 12\right)}{12P^4}, \tag{16}$$

де: $P = \ln x;\ Q = \ln P$.

За допомогою ПЕОМ $W(x)$ зручно обчислювати у середовищі Maple [7].

Похідна функції $W(x)$ має вигляд:

$$W'(x) = \frac{W}{x\cdot(1+W)} = \frac{1}{x\cdot\left(1+1/W\right)}. \tag{17}$$

Якщо ввести логарифмічне перетворення:

$$x = \frac{1}{2K\gamma}\ln\xi, \tag{18}$$

тоді вираз (8) можна звести до вигляду [1]:

$$\ln\left(\frac{\xi}{a}\right) - \left(\frac{\xi}{a}\right) = -\eta, \tag{19}$$

де: $a = 1 + \frac{2K\gamma v_1 v_2}{g};\ b = 1 - \frac{\left(2K\gamma v_1\right)^2}{g}\cdot y;\ \eta = \frac{b}{a} + \ln a$.

Рівняння (19) з невідомим $\xi \ge 1$, має два розв'язки:

$$\xi_j = -aW_j\left(-e^{-\eta}\right);\ \ j = \overline{(1;2)}, \tag{20}$$

у яких $W_{1,2}\left(-\xi\right)$ й $\left(x \geq x_e\right)$ основна й допоміжна дійсні гілки функції Ламберта від'ємного аргументу. (Тут $\left(x_e, y_e\right)$ − точка максимума на траєкторії польоту частинки). Тому, згідно з (18) й (20), на висхідній ділянці траєкторії ($x \leq x_e$):

$$x = \frac{1}{2K\gamma} \cdot \ln\left[-aW_1\left(-e^{-\eta}\right)\right]; \tag{21}$$

а на нисхідній ($x \geq x_e$):

$$x = \frac{1}{2K\gamma} \cdot \ln\left[-aW_2\left(-e^{-\eta}\right)\right]. \tag{22}$$

Розв'язки (21) та (22) стикуються у точці максимуму, де $\eta = 1$:

$$x = x_e = \frac{1}{2K\gamma} \cdot \ln a; \;\; y = y_e = \frac{g}{\left(2K\gamma v_1\right)^2} \cdot \left(1 - a + a \cdot \ln a\right), \tag{23}$$

внаслідок того, що $W_1\left(-e^{-1}\right) = W_2\left(-e^{-1}\right) = -1.$

Зазвичай, вирішуючи практичні задачі необхідно обчислювати дальність польоту частинки $x_* > x_e$ при заданому значенні $y_* < y_e$. Тоді, згідно з (22):

$$x_* = \frac{1}{2K\gamma} \cdot \ln\left[-aW_2\left(-e^{-\eta_*}\right)\right], \tag{24}$$

причому $\eta_* = \dfrac{1}{a} \cdot \left[1 - \dfrac{\left(2K\gamma v_1\right)^2}{g} \cdot y^*\right] + \ln a$.

Знаючи значення x_*, нескладно розрахувати й кут падіння частинки θ_*. Продиференціюємо вираз (8) по x, тоді для обчислення цього кута матимемо формулу:

$$\theta_* = arctg\left\{\frac{v_2}{v_1} - \frac{g}{2K\lambda v_1^2} \cdot \left(\exp\left[2K\gamma x_*\right] - 1\right)\right\}. \tag{25}$$

За абсолютною величиною цей кут більший за θ_0.

Формула (24) може бути перетворена для наближеного обчислення x_* з системи рівнянь (точної) (4), а саме:

$$x_* = \frac{1}{2\tilde{\gamma}K} \ln\left[-\tilde{a} \cdot W_2\left(-e^{-\tilde{\eta}_*}\right)\right], \tag{26}$$

причому: $\tilde{a} = 1 + \dfrac{2\tilde{\gamma}}{\lambda} \cdot tg\theta_0$; $\tilde{\eta}_* = \dfrac{1}{\tilde{a}} + \ln \tilde{a}$; $\tilde{\gamma} = 2\left(1 + \cos\theta_0\right)^{-1}$.

Тобто наближений розв'язок Дідіона може бути поданий (для дальності польоту частинки x_*) у вигляді функції Ламберта.

З метою верифікації формули (24) проведені обчислення x_* при різних значеннях v_B й K. Результати розрахунків записані у таблиці 1.

Таблиця 1

Значення x_* при різних K

x_*, м	K, м$^{-1}$	x_*, м	K, м$^{-}$	x_*, м	K, *м*$^{-}$
9,65	0,098	$5 \cdot 10^4$	10^{-4}	$5 \cdot 10^7$	*10^{-7}*
5,28	0,294	$5 \cdot 10^5$	10^{-5}	$5 \cdot 10^8$	*10^{-8}*
2,31	*0,980*	*$5 \cdot 10^6$*	*10^{-6}*	*$5 \cdot 10^9$*	*10^{-9}*

Слід зазначити, що результати, отримані для $K < 10^{-3}$ неточні, оскільки у таблицях функцій Ламберта [1] відсутні значення $W(\xi)$ при $\xi \to 0$ (найменше значення $\xi = 10^{-3}$, для якого ще визначена функція Ламберта). Тому отримані значення x_* слід вважати орієнтовними (або асимптотичними).

Отримані розв'язки Дідіона й їх інтерпретація через функцію Ламберта можуть бути також використані й для ідентифікації коефіцієнта парусності (K) частинки [1].

2. Аналітичні розв'язки спрощених рівнянь руху частинки для пологих (настильних) траєкторій у задачах балістики

Якщо слід отримати замкнений наближений розв'язок задачі балістики, тоді обмежуємось кутами $0 < \theta_0 \le 20^\circ$. Слід зазначити, що таке обмеження часто виконується у практичних ситуаціях, коли досліджують пологі (настильні) траєкторії руху частинки, яка рухається під невеликими кутами до горизонту. У таких випадках виконуються наступні нерівності:

$$\dot{x}^2 \gg \dot{y}^2, \ \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{1/2} \approx \dot{x}. \qquad (27)$$

Тому замість системи рівнянь (4) будемо розв'язувати аналітичним шляхом спрощену систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \ddot{x} + K \cdot \dot{x}^2 = 0; \\ \ddot{y} + K \cdot \dot{x} \cdot \dot{y} = -g, \end{cases} \qquad (28)$$

за початкових умов (5).

Розв’язок спрощеної задачі Коші отриманий у [10] і має такий вигляд:

$$x(t) = \frac{1}{K}\ln\left(1 + Kv_1 t\right); \tag{29}$$

$$y(t) = \tilde{b}\cdot\ln\left(1 + Kv_1 t\right)^2 - \frac{g}{\left(2Kv_1\right)^2}\cdot\left[\left(1 + Kv_1 t\right)^2 - 1\right], \tag{30}$$

де: $\tilde{b} = \dfrac{1}{2Kv_1}\cdot\left(v_2 + \dfrac{g}{2Kv_1}\right)$.

Якщо ввести у запис співвідношень (29) й (30) функцію Ламберта так, як це зроблено у [1] (з урахуванням виправлення помилок, допущених у цій роботі), тоді матимемо:

$$x = x(y) = \frac{1}{2K}\cdot\ln\left\{-\frac{\left(2Kv_1\right)^2\cdot\tilde{b}}{g}\cdot W_1\left[-\exp\left(-\eta\right)\right]\right\},\ \text{при } x \le x_e, \tag{31}$$

й

$$x = x(y) = \frac{1}{2K}\cdot\ln\left\{-\frac{\left(2Kv_1\right)^2\cdot\tilde{b}}{g}\cdot W_2\left[-\exp\left(-\eta\right)\right]\right\},\ \text{при } x \ge x_e. \tag{32}$$

У точці максимуму (по висоті) траєкторії ($y = y_e$; $x = x_e$) можна отримати:

$$x = x_e = \frac{1}{2K}\cdot\ln\left\{\frac{\left(2Kv_1\right)^2\cdot\tilde{b}}{g}\right\}. \tag{33}$$

З (31) й (32) випливає доволі компактна формула для обчислення горизонтальної дальності польоту ($x_* > x_e$) [10]:

$$x_* = \frac{1}{2K}\cdot\ln\left\{-\frac{\left(2Kv_1\right)^2\cdot\tilde{b}}{g}\cdot W_2\left[-\exp\left(-\tilde{\eta}_*\right)\right]\right\}. \tag{34}$$

Тут, у (34):

$$\tilde{\eta}_* = \frac{1}{\tilde{b}}\cdot\left[\bar{h} + \frac{g}{\left(2Kv_1\right)^2}\right] - \ln\left[\frac{g}{\left(2Kv_1\right)^2\cdot\tilde{b}}\right]; \tag{35}$$

$\bar{h} = -y_*$ − висота падіння частинки.

Розв’язок (29) можна використати й для ідентифікації коефіцієнта парусності K (якщо, зрозуміло, траєкторія польоту частинки є настильною/пологою). При цьому слід виміряти тривання (час) польоту частинки t_* на відстань x_*. Тоді, в силу (29):

$$K\cdot x_* = \ln\left(1 + Kv_1 t_*\right), \tag{36}$$

або:

$$\ln \tilde{z} - \tilde{z} = -\xi \, . \tag{37}$$

У рівнянні (37):

$$\tilde{z} = \frac{x_*}{v_1 t_*} \cdot \left(1 + K v_1 t_*\right); \;\; \xi = \frac{x_*}{v_1 t_*} - \ln\left(\frac{x_*}{v_1 t_*}\right). \tag{38}$$

Оскільки $\tilde{z} = -W_2\left(-\exp\left[-\xi\right]\right)$, тоді:

$$K = -\frac{1}{v_1 t_*} - \frac{1}{x_*} \cdot W_2\left(-\exp\left[-\xi\right]\right). \tag{39}$$

Насамкінець зазначимо, що за умови вильоту частинок під невеликим кутом до горизонту, для розрахунку x_* та K у нерухомому повітряному середовищі (з невеликою похибкою) можна застосувати формули (34) й (39), обчислюючи по таблиці, поданій у [1], значення функції Ламберта.

<u>3. Аналітичні розв'язки спрощених рівнянь руху частинки для траєкторій, які мають кут нахилу до горизонту, близький до 90°.</u>

Якщо слід отримати замкнений наближений розв'язок задачі зовнішньої балістики матеріальної частинки при початкових кутах нахилу її траєкторії до горизонту, близьких до 90°, тобто: $80^\circ \le \theta_0 < 90^\circ$, слід розв'язувати задачу Коші для спрощеної, у порівнянні з (4), системи диференціальних рівнянь за умови виконання наступних нерівностей:

$$\dot{y}^2 \gg \dot{x}^2; \;\; \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{1/2} \approx \dot{y} \, . \tag{40}$$

Таким чином, для опису таких крутих по відношенню до горизонту балістичних траєкторій руху частинки слід використовувати наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \ddot{x} + K \cdot \dot{x} \cdot \dot{y} = 0; \\ \ddot{y} + K \cdot \dot{y}^2 = -g. \end{cases} \tag{41}$$

Зазначимо, що така модель руху діє тільки на етапі підйому до найвищої точки траєкторії ($y = y_e$), а при русі донизу частинки з найвищої точки підйому до поверхні землі слід змінити знак перед g на протилежний. У подальшому тут розглянутий тільки перший етап руху частинки (вгору, до найвищої точки підйому $y = y_e$).

Розв'язок спрощеної задачі Коші у цьому випадку має такий вигляд:

$$x(t) = \frac{1}{2K} \cdot tg\theta_0 \cdot \ln\left(1 + K v_1 t\right)^2; \tag{42}$$

$$y(t)=\frac{g}{Kv_0\sin\theta_0}\cdot\left[\frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{(g/K)}+1\right]\cdot\left(\frac{1}{\beta a^*}\right)\cdot\left\{-\frac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{(a^*)^2}+1\right)}\cdot\ln\left(\tilde{\tilde{z}}^2+1\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\left(a^*+\frac{1}{a^*}\right)}\cdot arctg\left(\tilde{\tilde{z}}\right)+\frac{1}{\left(\frac{1}{(a^*)^2}+1\right)}\cdot\ln\left|a^*\tilde{\tilde{z}}+1\right|\right\}-\frac{gt}{Kv_0\sin\theta_0}, \tag{43}$$

де: $a^*=v_0\cdot\sin\theta_0\cdot\sqrt{\frac{K}{g}}$; $\beta=\sqrt{gK}$; $\tilde{\tilde{z}}=tg\left(\sqrt{gK}\cdot t\right)$.

Причому, для розмірностей коефіцієнтів, які входять у (43), маємо:

$$\left[a^*\right]=\left[\tilde{\tilde{z}}\right]=1;\ [\beta]=c^{-1}. \tag{44}$$

Отже, співвідношення (42) й (43) задають параметри балістичної (під кутом до горизонту, близьким до 90°) траєкторії руху частинки на етапі її підйому до максимальної точки, тобто: $0<x\le x_e$; $0<y\le y_e$. Для визначення параметрів вказаної вище траєкторії на етапі спуску (із найвищої точки підйому ($x_e;y_e$) донизу, до поверхні землі) слід використати для $x(t)$ співвідношення (42), а для $y(t)$ − (45).

Для визначення залежностей $x(y)$ та $y(x)$ на кожному з етапів руху частинки (спочатку вгору, до найвищої точки підйому $(x_e;y_e)$, а потім донизу, до поверхні землі, тобто до точки $(x_*;0)$) слід використати отримані залежності (42), (43) й (45), а також чисельний алгоритм побудови траєкторії руху за допомогою ПЕОМ (для кожного моменту часу t, $t\in[0;t_*]$, де t_* − тривалість руху у повітряному просторі частинки).

$$y(t)=\frac{g}{Kv_0\sin\theta_0}\cdot\left[\frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{(g/K)}+1\right]\cdot\left(\frac{1}{\beta a^*}\right)\cdot\left\{-\frac{1}{2\cdot\left[\frac{1}{\left(a^*\right)^2}+1\right]}\cdot\ln\left(\tilde{\tilde{z}}^2+1\right)+\right. \tag{45}$$

$$\left.+\frac{1}{\left(a^*+\frac{1}{a^*}\right)}\cdot arctg\left(\tilde{\tilde{z}}\right)+\frac{1}{\left[\frac{1}{\left(a^*\right)^2}+1\right]}\cdot\ln\left|a^*\tilde{\tilde{z}}+1\right|\right\}+\frac{gt}{Kv_0\sin\theta_0},$$

Висновки

1. Обгрунтовані фізико-механічна та математична моделі руху матеріальної точки/частинки у нерухомому (спокійному) газоподібному середовищі з квадратичним відносно швидкості руху опором.

2. Отримані інтегральні представлення координат на траєкторії руху матеріальної точки, розв’язана задача Коші у точній постановці. Задля опису параметрів траєкторії руху отримані наближені розв’язки, які співпадають з результатами Дідіона та Ольшанського В.П. й інших, де використана спеціальна функція Ламберта.

3. Проведений детальний аналіз руху матеріальної частинки у повітряному середовищі для двох випадків траєкторії руху: а) настильної; б) крутої балістичної, з кутом нахилу до горизонту, близьким до 90°. Для обох випадків отримані наближені розв’язки задачі Коші у квадратурах.

4. Отримані результати можуть бути у подальшому використані для уточнення й вдосконалення інженерних методів розрахунку у задачах балістики матеріальної маси, яка рухається у повітряному середовищі з квадратичним по швидкості руху опором.

References

1. Olshanckyi V.P., Olshanskyi S.V. Funktsyia Lamberta v zadachakh ballystyky materyalnoi tochky. − Kharkov : Yzdatel Savchuk A.O., 2013. 204 s. {in Russian}.

2. Zhukovskyi N.E. Teoretycheskaia mekhanyka. − M.-L.: HYTTA, 1952. 811 s. {in Russian}.

3. Zayka P.M., Melnyk V.Y., Anykeev A.Y. Svobodnoe dvyzhenye materyalnoi tochky v spokoinoi yzotropnoi hazoobraznoi srede. Vestnyk NTU «KhPY»: Dynamyka y prochnost mashyn. − Kh.: NTU «KhPY», 2001. Vыр. 25. S. 153-164. {in Russian}.

4. Olshanskyi V.P., Dubovyk O.A. Voprosы vneshnei ballystyky ohnetushashchykh veshchestv. − Kh.: Mytets, 2005. 236 s. {in Russian}.

5. Bat N.Y., Dzhanelydze H.Iu., Kelzon A.S. Teoretycheskaia mekhanyka v prymerakh y zadachakh. T. 2. Dynamyka − M.: Nauka, 1991. 640. {in Russian}.

6. Loitsianskyi L.H., Lure A.Y. Kurs teoretycheskoi mekhanyky. − M.: Hostekhyzdat, 1948. 580 s. {in Russian}.

7. Diakonov V.P. Maple 8 v matematyke, fyzyke y obrazovanyy. − M.: Solon-Press, 2003. 656 s. {in Russian}.

8. Fariel Shafee. Lambert function and new-extensive form of entropy. IMA Journal of Applied Mathematics. 2007. V. 72. P.785-800. {in English}

9. Corless R.M., Gonnet G.H., D.E.G. Hare and others. On the Lambert W Function. Advances in Computational Mathematics. 1996. V. 5. P. 329-359. {in English}

10. Olshanskyi V.P., Kucherenko S.Y., Burlaka V.V., Malets O.N. K raschetu dalnosty poleta chastyts v hazovoi srede. Visnyk KhNTUSH: Suchasni napriamky tekhnolohii ta mekhanizatsii protsesiv pererobnykh i kharchovykh vyrobnytstv. − Kh.: KhNTUSH, 2012. Vyp. 131. S. 33-38. {in Russian}.

Література

1. Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Функция Ламберта в задачах баллистики материальной точки. − Харьков : Издатель Савчук А.О., 2013. 204 с.

2. Жуковский Н.Е. Теоретическая механика. − М.-Л.: ГИТТА, 1952. 811 с.

3. Заика П.М., Мельник В.И., Аникеев А.И. Свободное движение материальной точки в спокойной изотропной газообразной среде. Вестник НТУ «ХПИ»: Динамика и прочность машин. − Х.: НТУ «ХПИ», 2001. Вып. 25. С. 153-164.

4. Ольшанский В.П., Дубовик О.А. Вопросы внешней баллистики огнетушащих веществ. − Х.: Митець, 2005. 236 с.

5. Бать Н.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2. Динамика − М.: Наука, 1991. 640.

6. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. − М.: Гостехиздат, 1948. 580 с.

7. Дьяконов В.П. Maple 8 в математике, физике и образовании. − М.: Солон-Пресс, 2003. 656 с.

8. Fariel Shafee. Lambert function and new-extensive form of entropy. IMA Journal of Applied Mathematics. 2007. V. 72. P.785-800.

9. Corless R.M., Gonnet G.H., D.E.G. Hare and others. On the Lambert W Function. Advances in Computational Mathematics. 1996. V. 5. P. 329-359.

10. Ольшанский В.П., Кучеренко С.И., Бурлака В.В., Малец О.Н. К расчету дальности полета частиц в газовой среде. Вісник ХНТУСГ: Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв. − Х.: ХНТУСГ, 2012. Вип. 131. С. 33-38.