

## ВИЗНАЧЕННЯ НЕСУЧОЇ ЗДАТНОСТІ КОСОЗІГНУТИХ БАЛОК НА ОСНОВІ РОЗРАХУНКОВОГО ОПОРУ ЗАЛІЗОБЕТОНУ

### BEARING CAPACITY DETERMINATION OF BIAXIALLY BENT BEAMS BASED ON THE DESIGN STRENGTH OF REINFORCED CONCRETE

Павліков А.М., д.т.н., професор, Гарькава О.В., к.т.н., докторант,  
Атембемах К., аспірант (Національний університет «Полтавська  
політехніка імені Юрія Кондратюка», м. Полтава)

Pavlikov A.M., ScD, professor, Harkava O.V., Ph.D., associate  
professor, Atembemoh K., postgraduate student (National University “Yuri  
Kondratyuk Poltava Polytechnic”, Poltava)

*На основі передумов розрахунку за Єврокодом 2 розроблено концепцію визначення значення розрахункового опору залізобетону при розрахунку міцності косозігнутих залізобетонних елементів. При цьому застосовано теорему про паралельність розташування площин дії внутрішніх та зовнішніх сил. Розглянуті випадки розрахунку для трикутної та трапецієподібної форм стиснутої зони бетону, що є характерними для косоного згинання балкових елементів. Виведені залежності для обчислення коефіцієнта впливу косоного згинання на значення характеристик елемента прямокутного перерізу з різними формами стиснутої зони бетону. Запропонований метод розрахунку міцності у нормальному перерізі балкових елементів при косому їх згинанні апробований шляхом порівняння результатів розрахунків з експериментальними даними для 12 зразків косозігнутих балок.*

*Complex deformation of reinforced concrete members is widespread in the practice of operation of many building structures. It can be caused by both force and various factors of a constructive, technological, or operational nature. The application of the concept of design strength of reinforced concrete in bearing capacity calculations of reinforced concrete members under complex deformation is complicated by the presence of additional unknown parameters: the angle of the neutral axis inclination, and various forms of the compressed concrete zone in the cross-section. The essence of the design approach is that reinforced concrete is considered a composite material that has a very specific strength characteristic - the design strength of reinforced concrete. The application of this concept creates possibilities to solve the problem of the strength of reinforced concrete members based on the classical theory of strength of materials. The implemented characteristic is an integral value that takes into account the strength and deformation characteristics of concrete, reinforcement, and its amount in the section. Based on the calculation prerequisites according to Eurocode 2, the concept of determining the value of the design strength of reinforced concrete is developed for calculating the strength of reinforced concrete beams that undergo biaxial bending. The theorem on the parallelism of the location of the planes of action of internal and external*

forces is applied. The calculation cases for the most expected forms of the compressed zone of concrete in a rectangular cross-section of biaxially bent beam members are considered. The values of the coefficient of influence of biaxial bending on the characteristics of the member with triangular and trapezoidal forms of the compressed zone of concrete are obtained. The developed methodology for calculating the load-bearing capacity of biaxially bent elements based on the use of design strength of reinforced concrete is brought to the engineering level of application. The proposed method of calculating the strength in the normal cross-section of beam members under biaxial bending is approved by comparing the results of calculations with experimental data for 12 samples of biaxially bent beams.

*Ключові слова:* бетон, арматура, балка, косий згин, несуча здатність розрахунок.

*Keywords:* concrete, reinforcement, beam, biaxial bending, bearing capacity, design.

**Вступ.** Складне деформування залізобетонних елементів та конструкцій може бути викликане різними факторами силового, конструктивного, технологічного чи експлуатаційного характеру. Воно є широко розповсюдженим в практиці експлуатації багатьох будівельних конструкцій. Складного деформування зазнають чимало залізобетонних елементів, які експлуатуються в умовах косоного згинання. Такого виду складного деформування зазнають як окремі елементи (залізобетонні прогони, підкранові балки, стінові панелі та багато інших), складові частини (оболонки, мостів, сходових маршів, підземних споруд, транспортних галерей та естакад, фундаментів, фахверків), так і цілі просторові системи будівель та споруд

**Аналіз останніх досліджень.** Розрахунки міцності косо деформованих елементів на основі застосування чисельних методів розглянуто в роботах [1 – 9] для перерізів довільної форми з довільним розташуванням арматури. Для реалізації цих розрахунків на практиці були розроблені графіки у вигляді кривих момент-кривизна, кривих взаємодії граничної міцності та тривимірних поверхонь руйнування [10]. Результати досліджень міцності косозігнутих залізобетонних елементів наведені в публікаціях [11 – 12]. Розроблені алгоритми розрахунку міцності та їх результати порівняні з експериментальними даними.

Концепцію розрахункового опору залізобетону та пропозиції щодо її використання наведено в роботах [13 – 14]. Запропонований підхід полягає у тому, що залізобетон розглядається як композитний матеріал, який має визначену характеристику міцності – розрахунковий опір залізобетону. Застосування цього поняття робить можливим задачі міцності залізобетонних елементів розв'язувати на основі класичної теорії опору матеріалів. Впроваджена характеристика являє собою інтегральну

величину, яка враховує міцнісні та деформативні характеристики бетону й арматури, а також відсоток армування перерізу.

Розроблена методика розрахунку несучої здатності може бути застосована для будь-якого виду деформування залізобетонного елемента. Але використання цього методу в розрахунках міцності залізобетонних елементів при складному деформуванні ускладнюється необхідністю визначення кута нахилу нейтральної лінії та відповідної форми стиснутої зони бетону в перерізі. На сьогодні практичних пропозицій щодо застосування теорії опору залізобетону для косозігнутих елементів у такому аспекті не розроблено.

**Постановка мети і задач досліджень.** У роботі розглянуто застосування теорії розрахункового опору залізобетону при косому згинанні для елементів прямокутного перерізу з одиночним армуванням.

**Методика досліджень.** Використовуються передумови розрахунку за [15]: приймається рівномірний розподіл напружень в бетоні стиснутої зони, діаграма деформування арматури з фізичною площадкою текучості приймається дволінійною з горизонтальною ділянкою необмеженої довжини. В якості критерію руйнування застосовується деформаційний критерій.

Розв'язання задач міцності залізобетонних елементів на основі розрахункового опору залізобетону пропонується здійснювати з використанням нерівності

$$M_{Ed} \leq M_{Rd} = f_{zM} W \gamma, \quad (1)$$

де  $f_{zM}$  – розрахунковий опір залізобетону одиночно армованого елемента прямокутного перерізу при плоскому згинанні;  $W = bd^2/6$  – пружний момент опору прямокутного перерізу;  $\gamma$  – коефіцієнт, який враховує вплив двовісного вигину на значення характеристик елемента в (1). У роботах [13 – 14] розрахунковий опір залізобетону  $f_{zM}$  для прямокутного перерізу з одиночним армуванням з урахуванням прийнятих передумов виведений у вигляді залежності.

$$f_{zM} = 6f_{yd}\rho_l \left( 1 - \frac{f_{yd}\rho_l}{2f_{cd}} \right), \quad (2)$$

де  $\rho_l = A_s / (b_d h)$  – коефіцієнт поздовжнього армування елемента в нормальному перерізі;  $f_{yd}$  – розрахункове значення опору арматури;  $f_{cd}$  – розрахункове значення опору бетону.

Залежність (2) дає можливість протабулювати значення

розрахункового опору залізобетону залежно від класів бетону й арматури при різних відсотках армування. Для прикладу в таблиці 1 наведено значення  $f_{zM}$  для арматури класу А500С. Слід брати до уваги, що значення величин в таблиці 1 обчислені при умові, що в момент руйнування напруження в розтягнутій арматурі досягають межі текучості.

Таблиця 1

Розрахункові значення опору залізобетону для згинальних елементів прямокутного перерізу з одним армуванням арматурою класу А500С ( $f_{yd} = 435$  МПа)

$\rho_l$ , %	C16/20	C20/25	C25/30	C30/35	C32/40	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60
0,05	1,29	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30	1,30
0,50	11,82	12,07	12,22	12,32	12,40	12,48	12,53	12,58	12,62
1,00	21,16	22,19	22,76	23,19	23,52	23,83	24,04	24,21	24,38
1,25	24,91	26,51	27,41	28,08	28,59	29,08	29,40	29,67	29,94
1,75	30,56	33,69	35,45	36,76	37,77	38,72	39,35	39,88	40,41
2,00	–	36,54	38,84	40,56	41,88	43,12	43,94	44,63	45,32
2,50	–	–	44,38	47,06	49,12	51,06	52,35	53,42	54,50
3,00	–	–	–	52,10	55,08	57,86	59,72	61,27	62,82

Для визначення коефіцієнта  $\gamma$ , який враховує вплив косоного згинання залізобетонної балки на величину розрахункового опору залізобетону балки, розглянемо спочатку випадок, при якому стиснута зона бетону має форму трапеції. Згідно з прийнятими передумовами розрахункова схема перерізу матиме вигляд, наведений на рис. 1.

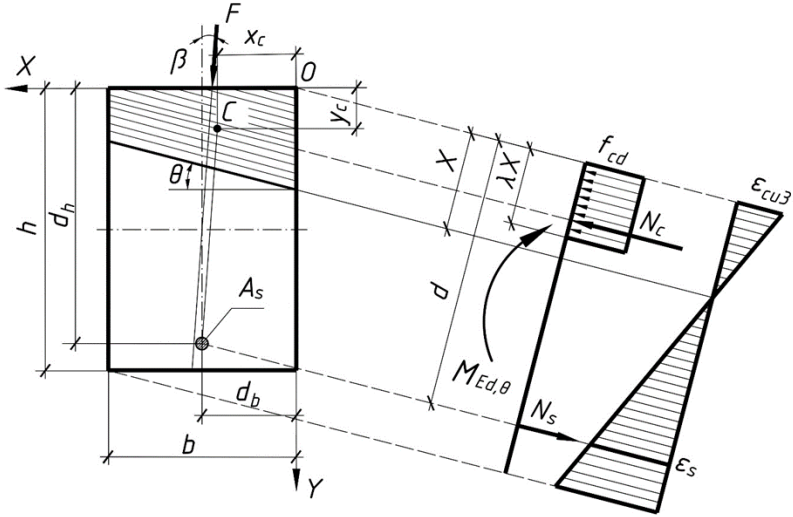


Рис. 1. Розрахункова схема перерізу косозігнутої балки з трапецієподібною формою стиснутої зони бетону

Ураховуючи викладені вище передумови розрахункові рівняння рівноваги в площині вертикальної координатної осі  $Y$  записані у вигляді.

$$\sum Z = N_s - N_c = 0; \quad (3)$$

$$\sum M_C = M_{Rd,Y} - M_{Ed,Y} = 0, \quad (4)$$

де

$$M_{Rd,Y} = N_s (d_h - y_c), \quad (5)$$

$N_s, N_c$  – рівнодійні зусиль відповідно в розтягнутій арматурі та в бетоні стиснутої зони відповідно;

$d_h$  – відстань від найбільш стиснутої фібри бетону перерізу до точки прикладання рівнодійної  $N_s$ ;

$y_c$  – координата прикладання рівнодійної  $N_c$ ;

$M_{Rd,Y}, M_{Ed,Y}$  – значення згинальних моментів від дії внутрішніх та зовнішніх зусиль відповідно в площині координатної осі  $Y$  в момент вичерпання міцності залізобетонного елемента в нормальному перерізі.

Для одержання необхідних розрахункових формул спочатку були отримані вирази рівнодійної  $N_c$ , а також відстані  $y_c$  від найбільш стиснутої фібри бетону до точки прикладання  $N_c$ . Шукані вирази для

трапецієподібної форми стиснутої зони перерізу (рис. 1) отримано в такому вигляді:

$$N_c = \frac{f_{cd} b}{\cos \theta} \left( \lambda X - \frac{b \sin \theta}{2} \right); \quad (6)$$

$$y_c = \frac{3\lambda^2 X^2 - 3\lambda X b \sin \theta + b^2 \sin^2 \theta}{3 \cos \theta (2\lambda X - b \sin \theta)}, \quad (7)$$

де  $\theta$  – кут нахилу нейтральної лінії;

$X$  – висота стиснутої зони бетону.

Оскільки задача розв'язується для випадку, коли напруження в арматурі розтягнутої зони досягають значень  $\sigma_s = f_{yd}$ , то рівнодійна зусиль в розтягнутій арматурі визначається за залежністю

$$N_s = f_{yd} A_s. \quad (8)$$

Прирівнявши праву частину нерівності (1) та рівняння (5) з урахуванням (2), (6) – (8) отримано коефіцієнт впливу косоного згинання на значення характеристик елемента в (1) для прямокутного перерізу з трапецієподібною формою стиснутої зони бетону.

$$\gamma = 1 - \frac{f_{cd}^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{12 f_{yd} \rho_l (2 f_{cd} - f_{yd} \rho_l)} \left( \frac{b^2}{d_h^2} \right). \quad (9)$$

Отримання залежності  $\theta = f(\beta)$ , за допомогою якої можна обчислити значення кута нахилу нейтральної лінії  $\theta$  в (9), здійснено на основі застосування умови про паралельність площин дії внутрішнього  $M_{Rd,\beta}$  та зовнішнього  $M_{Ed,\beta}$  моментів, які діють у площинах, розташованих під кутом  $\beta$  до вертикальної осі симетрії перерізу. Відповідно з цією умовою в системі координат  $XOY$  (рис. 1) справедливим є співвідношення.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{d_b - x_c}{d_h - y_c}, \quad (10)$$

у якому  $d_b$ ,  $d_h$  – робочі висоти відповідно в напрямку осей  $X$  і  $Y$  поперечного перерізу косозігнутого елемента;

$x_c$ ,  $y_c$  – координати точки прикладання рівнодійної напружень в бетоні стиснутої зони в системі координат  $XOY$ . Координата  $y_c$  визначається за залежністю (7), а координата

$$x_c = \frac{b(3\lambda X - 2b \sin \theta)}{3(2\lambda X - b \sin \theta)}. \quad (11)$$

Підстановка (7) та (11) у вихідну формулу (10) дає можливість отримати рівняння, розв'язком якого відносно  $\operatorname{tg}\theta$  буде формула, яка дозволяє обчислювати кут  $\theta$  залежно від кута  $\beta$  нахилу зовнішньої силової площини. Виділивши співвідношення  $b/d_h$  як таке, котре можна задавати, та виконавши заміну  $\rho_l = A_s / (bd_h)$ , формулу для визначення кута  $\theta$  записано так:

$$\operatorname{tg}\theta = -\operatorname{ctg}\beta \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{24f_{yd}\rho_l}{f_{cd}\operatorname{ctg}\beta} \left( \left( k - \frac{1}{2} \right) \frac{b}{d_h} - \operatorname{tg}\beta \left( 1 - \frac{f_{yd}\rho_l}{2f_{cd}} \right) \right) \left( \frac{d_h}{b} \right)^2} \right), \quad (12)$$

де  $k = d_b / b$ .

Таким чином, використовуючи залежності (9) та (12) можна протабулювати коефіцієнт впливу косоного згинання на значення характеристик елемента в (1) для прямокутного перерізу з трапецієподібною формою стиснутої зони бетону при зміні кута  $\beta$  площини дії зовнішнього навантаження відносно вертикальної осі симетрії для певного співвідношення  $b/d_h$ .

Подібним чином знайдено коефіцієнт впливу косоного згину на значення характеристик елемента (1) для прямокутного перерізу з трикутною формою стиснутої зони бетону залежно від кута  $\beta$ . При цьому була застосована схема розрахунку, наведена на рисунку 2.

Загальні рівняння рівноваги для розглядуваної розрахункової схеми на рисунку 2 матимуть вигляд (3) – (4).

Шукані вирази рівнодійної  $N_c$  в (3), а також вираз координати  $y_c$  її прикладання в (4) для трикутної форми стиснутої зони перерізу (рис. 2) набувають такого вигляду:

$$N_c = \frac{f_{cd}\lambda^2 X^2}{\sin 2\theta}, \quad (13)$$

$$y_c = \frac{\lambda X}{3\cos\theta}. \quad (14)$$

Оскільки задача розв'язується для випадку, коли напруження в арматурі розтягнутої зони досягають значень  $\sigma_s = f_{yd}$ , то рівнодійна зусиль в розтягнутій арматурі визначатиметься за залежністю (8).

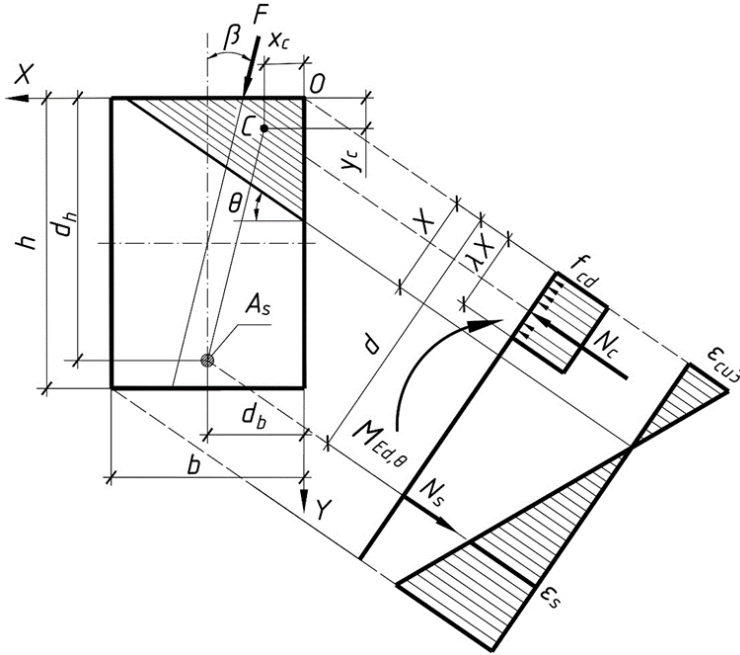


Рис. 2. Розрахункова схема перерізу косозігнутої балки з трикутною формою стиснутої зони бетону

Прирівнявши праву частину нерівності (1) і рівняння (5) з урахуванням (2), (8), (13) – (14) отримано вираз для розрахунку коефіцієнта  $\gamma$  з урахуванням впливу косоного згину на значення характеристик елемента у (1) для прямокутного поперечного перерізу з трикутною формою стиснутої зони бетону, тобто.

$$\gamma = \frac{2f_{cd}}{2f_{cd} - f_{yd}\rho_l} - \sqrt{\frac{8f_{cd}f_{yd}\rho_l \operatorname{tg}\theta}{9(2f_{cd} - f_{yd}\rho_l)^2} \frac{b}{d_h}}. \quad (15)$$

Для одержання залежності  $\theta = f(\beta)$ , застосована умова (13), в якій координата  $u_c$  визначається за залежністю (14), а координата  $x_c$

$$x_c = \frac{\lambda X}{3 \sin \theta}. \quad (16)$$



Підстановка (14) та (16) у вихідну формулу (10) дає можливість отримати рівняння, розв'язком якого відносно  $\operatorname{tg}\theta$  є формула, за якою обчислюється кут  $\theta$  залежно від кута  $\beta$  нахилу зовнішньої силової площини. Виділивши співвідношення  $b/d_h$  як таке, котре можна задавати, формула для визначення кута  $\theta$  записана у вигляді:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{d_h}{b} \frac{f_{cd} l^2}{8 f_{yd} \rho_l \operatorname{tg}^2 \beta} \left( \sqrt{1 + \frac{8 f_{yd} \rho_l}{f_{cd} l^2} \frac{b}{d_h} \operatorname{tg}\beta - 1} \right)^2, \quad (17)$$

де  $l = 3kb/d_h - 3\operatorname{tg}\beta$ ;  $k = d_b/b$ .

Повноцінний розрахунок косозігнутих елементів за викладеною методикою можливий тільки при умові, що відома форма стиснутої зони бетону. Для її визначення розглядається випадок перетворення трапецієподібної форми стиснутої зони в трикутну при перетині нейтральною лінією менш стиснутого ребра перерізу. Таке положення нейтральної лінії, як це видно з порівняння розрахункових схем, зображених на рисунках 1 і 2, є граничним між цими схемами.

Із аналізу рівняння  $\Sigma Z = 0$  при граничному положенні нейтральної лінії рівняння, отримано, що умовою для розмежування форм стиснутої зони буде нерівність

$$\frac{f_{cd} X^2 \lambda^2}{\sin 2\theta} \geq f_{yd} A_s. \quad (18)$$

Якщо умова (18) виконується, стиснута зона бетону має вигляд трикутника, якщо не виконується – стиснута зона має вигляд трапеції. Для використання даної умови на практиці необхідно знати всі параметри, що входять в нерівність (18). При розв'язанні задачі перевірки міцності невідомими є два параметри  $X$  і  $\theta$ . Для визначення невідомих застосована умова про паралельність площин дії внутрішніх та зовнішніх зусиль, яка на основі розрахункової схеми записується у вигляді (10).

Після виконання математичних перетворень умова для розмежування форм стиснутої зони приводиться до простого вигляду

$$\operatorname{ctg}\beta \leq \frac{3f_{cd} - 2f_{yd}\rho_l}{f_{cd}(3k-1)} \frac{d_h}{b}. \quad (19)$$

Отже, при виконанні нерівності (19) маємо трикутну форму стиснутої зони бетону, при невиконанні – трапецієподібну.

З використанням виведених залежностей (12), (17), (23), (27) та (30) можливо визначити коефіцієнт  $\gamma$  врахування впливу косоного згинання на значення характеристик елемента в (1) для прямокутного перерізу. При цьому до уваги беруться також геометричні характеристики перерізу у вигляді співвідношень  $b / d_h$ ,  $k = d_b / d_h$  (рис. 1 – 2) та коефіцієнт  $\rho_l$  поздовжнього армування перерізу. Значення коефіцієнта  $\gamma$  для арматури класу А500С наведені в таблиці 2 для випадку досягнення розтягнутою арматурою межі текучості в момент руйнування елемента.

Таблиця 2

Коефіцієнт  $\gamma$  зниження опору залізобетону для косозігнутих елементів прямокутного перерізу з одиничним армуванням арматурою класу А500С

$$(f_{yd} = 435 \text{ МПа}, \rho_l = 1\%, b / d_h = 0,5, k = 0,5)$$

$\beta^\circ$	C16/20	C20/25	C25/30	C30/35	C32/40	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
2	0,991	0,993	0,994	0,994	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996
3	0,981	0,984	0,986	0,987	0,989	0,990	0,991	0,991	0,992
4	0,966	0,972	0,975	0,978	0,980	0,982	0,983	0,985	0,986
5	–	0,957	0,962	0,966	0,969	0,972	0,975	0,976	0,978
6	–	0,940	0,947	0,952	0,957	0,961	0,964	0,967	0,969
7	–	0,922	0,930	0,937	0,942	0,948	0,952	0,955	0,959
8	–	0,901	0,911	0,919	0,926	0,933	0,938	0,942	0,946
9	–	–	0,890	0,899	0,907	0,915	0,921	0,926	0,931
10	–	–	0,867	0,878	0,886	0,895	0,902	0,907	0,913

З використанням розробленого методу визначена міцність косозігнутих балок, досліджених в роботі [12]. Результати обчислень та експериментальні дані наведені в таблиці 3.

Таблиця 3

Результати порівняння експериментальних та теоретичних значень руйнівного згинального моменту косозігнутих балок ( $b/d_n = 0,8$ ;  $k = 0,62$ )

Шифр балки	$\sigma_{ym}$ , МПа	$A_s$ , мм <sup>2</sup>	$\rho$ , %	$f_{cm}$ , МПа	$\beta^\circ$	$f_{zM}$ , МПа	$\gamma$	$M_Y$ , кНм	$M_{\beta, theor}$ , кНм	$M_{\beta, exp}$ , кНм	$\Delta$ , %
БП-1-1	379	544	1,7	25	0,00	33,69	0,975	35,03	35,03	34,65	-1,1
БП-1-2	379	544	1,7	25	6,40	33,69	1,000	35,93	35,71	39,60	9,8
БП-1-3	379	544	1,7	25	10,00	33,69	0,991	35,61	35,07	39,15	10,4
БП-1-4	379	544	1,7	25	13,36	33,69	0,969	34,82	33,88	38,25	11,4
БП-1-5	379	544	1,7	22	20,00	33,01	0,892	31,40	29,50	30,15	2,1
БП-3-1	542	292	0,91	22	0,00	26,32	0,979	27,48	27,48	27,90	1,5
БП-3-2	542	292	0,91	22	13,36	26,32	0,971	27,27	26,54	30,15	12,0
БП-3-3	542	292	0,91	22	20,00	26,32	0,905	25,40	23,87	27,45	13,1
БП-4-1	581	462	1,44	21	0,00	40,28	0,958	41,15	41,15	41,40	0,6
БП-4-2	581	462	1,44	21	6,40	40,28	1,000	42,96	42,69	42,30	-0,9
БП-4-3	581	462	1,44	21	10,00	40,28	0,991	42,56	41,91	44,10	5,0
БП-4-4	581	462	1,44	21	13,36	40,28	0,964	41,40	40,28	43,65	7,7

**Висновки.** Розроблено концепцію визначення величини розрахункової міцності залізобетону для розрахунку несучої здатності косозігнутих залізобетонних балок. Розраховано значення коефіцієнта впливу косоного згинання на характеристики елемента прямокутного перерізу з трикутною та трапецієподібною формами стиснутої зони бетону. Запропонована методика визначення міцності в нормальному перерізі косозігнутих балок на основі розрахункового опору залізобетону забезпечує задовільну збіжність даних розрахунку з даними, отриманими за результатами експериментів.

#### References

1. Lau C.Y., Chan S.L. and So A.K.W. "Biaxial Bending Design of Arbitrarily Shaped Reinforced Concrete Column", *ACI Structural Journal*, 90(3) pp. 269–78, 1993.
2. Kim J.-K. and Lee S.-S. "The behavior of reinforced concrete columns subjected to axial force and biaxial bending", *Engineering Structures*, 22(11), pp. 1518–28, 2000.
3. Fafitis A. "Interaction Surfaces of Reinforced-Concrete Sections in Biaxial Bending", *Journal of Structural Engineering*, 127(7), 2001.

4. Sfakianakis M.G. “Biaxial bending with an axial force of reinforced, composite and repaired concrete sections of arbitrary shape by fiber model and computer graphics”, *Advances in Engineering Software*, 33(4), pp. 227–42, 2002.
5. Furlong R.W., Hsu Ch-T. T. and Mirza S. A. “Analysis and Design of Concrete Columns for Biaxial Bending-Overview”, *ACI Structural Journal*, 101(3), pp. 413–22, 2004.
6. Bonet J.L., Romero M.L., Miguela P.F. and Fernandez M.A. “A fast stress integration algorithm for reinforced concrete sections with axial loads and biaxial bending”, *Computers & Structures*, 82(2–3), pp. 213–25, 2003.
7. Bonet J.L., Barros M.H.F.M., and Romero M.L. “Comparative study of analytical and numerical algorithms for designing reinforced concrete sections under biaxial bending”, *Computers & Structures*, 84(31-32), pp. 2184–2193, 2006.
8. Pallarés L., Bonet J. L., Miguel P. F. and Fernández Prada M. A. “Experimental research on high strength concrete slender columns subjected to bending and biaxial bending forces”, *Engineering Structures*, 30(7), pp. 1879-94, 2008.
9. Di Ludovico M., Lignola, G. P., Prota A. and Cosenza E.” Nonlinear Analysis of Cross Sections under Axial Load and Biaxial Bending”, *ACI Structural Journal*, 107(4), pp. 390–9, 2010.
10. Papanikolaou V. K. “Analysis of arbitrary composite sections in biaxial bending and axial load”, *Computers & Structures*, 98-99, pp. 33-54, 2012.
11. Rodrigues R. “A new technique for ultimate limit state design of arbitrary shape RC sections under biaxial bending”, *Engineering Structures*, 104(1), pp. 1–17, 2015.
12. Pavlikov A., Kosior-Kazberuk M., and Harkava O. “Experimental testing results of reinforced concrete beams under biaxial bending”, *International Journal of Engineering & Technology*, 7 (3.2), pp. 299–305, 2018.
13. Kochkarov D.V. “Nonlinear resistance of reinforced concrete elements and structures to force effects”, *Rivne: O. Zen*, 2015, p 384.
14. Pavlikov A., Kochkarov D., and Harkava O. “Calculation of reinforced concrete members strength by the new concept”, *Innovations in Materials, Design, and Structures: Proc. of the fib Symp. 2019 (Kraków)*, pp. 820–7, 2019.
15. EN 1992-1-1:2004 9 (2006) Eurocode 2: Design of Concrete Structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings (Lausanne: Fédération Internationale du Béton (fib))

### **Література**

1. Lau C.Y., Chan S.L. and So A.K.W. “Biaxial Bending Design of Arbitrarily Shaped Reinforced Concrete Column”, *ACI Structural Journal*, 90(3) pp. 269–78, 1993.
2. Kim J.-K. and Lee S.-S. “The behavior of reinforced concrete columns subjected to axial force and biaxial bending”, *Engineering Structures*, 22(11), pp. 1518–28, 2000.
3. Fafitis A. “Interaction Surfaces of Reinforced-Concrete Sections in Biaxial Bending”, *Journal of Structural Engineering*, 127(7), 2001.

4. Sfakianakis M.G. “Biaxial bending with an axial force of reinforced, composite and repaired concrete sections of arbitrary shape by fiber model and computer graphics”, *Advances in Engineering Software*, 33(4), pp. 227–42, 2002.
5. Furlong R.W., Hsu Ch-T. T. and Mirza S. A. “Analysis and Design of Concrete Columns for Biaxial Bending-Overview”, *ACI Structural Journal*, 101(3), pp. 413–22, 2004.
6. Bonet J.L., Romero M.L., Miguela P.F. and Fernandez M.A. “A fast stress integration algorithm for reinforced concrete sections with axial loads and biaxial bending”, *Computers & Structures*, 82(2–3), pp. 213–25, 2003.
7. Bonet J.L., Barros M.H.F.M., and Romero M.L. “Comparative study of analytical and numerical algorithms for designing reinforced concrete sections under biaxial bending”, *Computers & Structures*, 84(31-32), pp. 2184–2193, 2006.
8. Pallarés L., Bonet J. L., Miguel P. F. and Fernández Prada M. A. “Experimental research on high strength concrete slender columns subjected to bending and biaxial bending forces”, *Engineering Structures*, 30(7), pp. 1879-94, 2008.
9. Di Ludovico M., Lignola, G. P., Prota A. and Cosenza E.” Nonlinear Analysis of Cross Sections under Axial Load and Biaxial Bending”, *ACI Structural Journal*, 107(4), pp. 390–9, 2010.
10. Papanikolaou V. K. “Analysis of arbitrary composite sections in biaxial bending and axial load”, *Computers & Structures*, 98-99, pp. 33-54, 2012.
11. Rodrigues R. “A new technique for ultimate limit state design of arbitrary shape RC sections under biaxial bending”, *Engineering Structures*, 104(1), pp. 1–17, 2015.
12. Pavlikov A., Kosior-Kazberuk M., and Harkava O. “Experimental testing results of reinforced concrete beams under biaxial bending”, *International Journal of Engineering & Technology*, 7 (3.2), pp. 299–305, 2018.
13. Кочкаръов Д.В. “Нелінійний опір залізобетонних елементів і конструкцій силовим впливам”, Рівне: О. Зень, 2015, р 384.
14. Pavlikov A., Kochkarov D., and Harkava O. “Calculation of reinforced concrete members strength by the new concept”, *Innovations in Materials, Design, and Structures: Proc. of the fib Symp. 2019 (Kraków)*, pp. 820–7, 2019.
15. ДСТУ-Н Б EN 1992-1-1:2010. Єврокод 2. Проектування залізобетонних конструкцій. Частина 1-1. Загальні правила і правила для споруд. К.: Мінрегіонбуд України, 2012. 312 с.