

ГРАНИЧНА ДЕФОРМАТИВНІСТЬ БЕТОНУ В ЗГИНАЛЬНИХ ПЕРЕАРМОВАНИХ ЕЛЕМЕНТАХ

ULTIMATE DEFORMABILITY OF CONCRETE IN FLEXURAL OVER REINFORCED MEMBERS

Павліков А.М., д.т.н., професор, Гарькава О.В., к.т.н., доцент (Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», м. Полтава)

Pavlikov A.M., Dr.Tech in Engineering, Professor, Harkava O.V., Ph.D., Associate Professor (National University "Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic", Poltava)

Застосування нелінійної деформаційної моделі в розрахунках міцності залізобетонного елемента базується на використанні граничних значень деформацій стиску бетону в момент руйнування. Розрахункові граничні значення деформацій бетону можна визначити аналітично шляхом дослідження на екстремум функції несучої здатності залізобетонного елемента від шуканої деформації. При цьому зазвичай припускають, що розтягнута арматура досягає межі текучості і в подальшому напруження в ній постійні. У переармованих згинальних елементах в момент руйнування напруження в арматурі не досягають межі текучості і вони не є сталою величиною. Для такого випадку розрахункові граничні значення деформацій стиску бетону запропоновано визначати аналітично, але за іншим критерієм.

The analysis of reinforced concrete members in section analysis relies on the application of deformation theory, which involves using the ultimate values of concrete compressive strains at the moment of failure. These strains can be determined by analysing the bearing capacity function at its highest point. Typically, this analysis assumes that the tensile reinforcement reaches its yield point and maintains a constant stress. However, in the case of overreinforced elements, the stresses in the reinforcement at the moment of failure do not reach the yield point and are not constant. Given that the failure of overreinforced members initiates from a compressed region, it is evident that the criterion for failure in such cases will be reaching the maximum strength of the compressed concrete area within the member. In such situations, an analytical criterion is proposed to determine the ultimate compressive strain of concrete in reinforced concrete members. This criterion, along with the commonly used criterion for extreme concrete strength in regular reinforced concrete members, forms the basis for calculating the strength of reinforced concrete structures. The ultimate compressive strains of concrete are determined by applying the derived criterion to a range of concrete classes, represented by a coefficient "k" ranging from 1 to 5. The resulting diagram can be used to standardize the ultimate values of concrete strains for different concrete classes. Additionally, the ultimate values of fiber strain can be utilized to determine the bearing capacity of members subjected to axial load and bending moment, where the tensile reinforcement operates within the elastic stage. Based on the

deformation model, formulas for calculating the strength of flexural reinforced concrete members are derived using the calculated ultimate strains of concrete. These calculations are based on the equations of solid body mechanics and a complete stress-strain diagram of concrete and reinforcement. To facilitate practical calculations, a table of ultimate strains of concrete values and necessary coefficients for various concrete classes has been developed. The application of this method is illustrated through an example.

Ключові слова: залізобетонний елемент, граничні деформації бетону, розрахунок міцності.

Keywords: reinforced concrete member, ultimate concrete strain, section analysis.

Вступ. Розрахунок міцності згинальних залізобетонних елементів на основі застосування деформаційної моделі базується на застосуванні розрахункових (їх часто називають граничними) значень деформацій ϵ_{cu} найбільш стиснутої фібри бетону в залізобетонному елементі. Для визначення цих значень деформацій застосовують різні підходи.

Аналіз останніх досліджень. Найпростіший підхід характеризується використанням фіксованих значень деформацій ϵ_{cu} бетону, отриманих на основі експериментальних досліджень [1 – 4]. Згідно з іншим підходом розрахункові значення деформацій бетону визначають аналітично шляхом дослідження функції $M_{Rd} = f(\epsilon_{cm})$ на екстремум (де ϵ_{cm} – деформації бетону в найбільш стиснутій фібрі нормального перерізу залізобетонного елемента) завдяки введеному поняттю екстремального критерію міцності $\partial M_{Rd} / \partial \epsilon_{cm} = 0$ залізобетонного елемента в нормальному перерізі [5 – 8]. Відомі також аналітичні підходи з визначення граничних значень деформацій, які ґрунтуються на методі енергетичного балансу [9 – 10], та інші [11 – 12].

Постановка мети і задач досліджень. Застосування екстремального критерію реалізовано [7] для нормально армованих залізобетонних елементів, а саме таких, у яких в момент руйнування напруження в арматурі розтягнутої зони досягають межі текучості, тобто $\sigma_s = f_{yd}$. Для переармованих елементів, у котрих в момент їх руйнування розтягнута арматура не досягає межі текучості, граничні значення деформацій бетону можуть набувати більших значень порівняно з розрахованими при встановленому сталому значенні напружень в арматурі. Застосування для таких елементів екстремального критерію $\partial M_{Rd} / \partial \epsilon_{cm} = 0$ при $\sigma_s = f_{yd}$ є неприйнятним, а тому граничні значення деформацій бетону для цих випадків слід визначати методами ітерацій. На сьогодні немає пропозицій щодо визначення аналітичним розрахунком таких граничних значень деформацій бетону в переармованих залізобетонних елементах. Їх визначення аналітично є також актуальним для розрахунку позациентрово

стиснутих елементів з малими ексцентриситетами. Отже, за мету роботи ставиться аналітичне виведення залежності для визначення граничних деформацій бетону у складі залізобетонного елемента прямокутного перерізу за умови роботи розтягнутої арматури в пружній стадії та застосування цих деформацій в розрахунку міцності.

Методика досліджень. Розрахунок граничного значення деформацій бетону для переармованих залізобетонних елементів ґрунтується на нелінійній деформаційній моделі [1]. Сутність розрахунку полягає в тому, що у поперечному перерізі враховується приріст не зусиль, а деформацій. У цій роботі розрахунок приросту деформацій (рис. 1) розглядається у найбільш стиснутій фібрі бетону (у точці з максимальним рівнем відносних деформацій $\eta_m = \epsilon_{cm} / \epsilon_{c1,cd}$).

Розв'язання задачі визначення граничних деформацій бетону здійснено за розрахунковою схемою, зображеною на рисунку 1. На схемі розподіл напружень у бетоні стиснутої зони представлено за допомогою функції-апроксимації діаграми стану бетону «напруження- деформації» у вигляді залежності (3.4) за [1]. Тут, в якості прикладу, задача розглядається для балки прямокутного поперечного перерізу, армованого одиночною арматурою. При цьому вважається, що арматура в поперечному перерізі працює з неповним розрахунковим опором, тобто $\sigma_s < f_{yd}$.

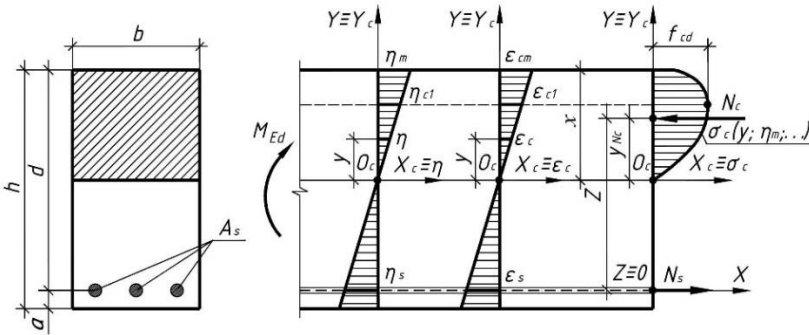


Рис. 1. Розрахункова схема зусиль, напружень та деформацій в перерізі переармованого залізобетонного елемента

У поставленій задачі відомими величинами є: площа поперечного перерізу поздовжньої арматури A_s , розміри поперечного перерізу балки $b \times h$, фізико-механічні характеристики бетону f_{cd} , $E_{cd,ec1}$, $\epsilon_{c1,cd}$ й арматури f_{yd} , E_s . Також відомо, що балка переармована. Невідомими величинами вважаються значення моменту M_{Rd} , який може сприйнятись балкою, та відповідне йому значення відносних деформацій в найбільш стиснутій

фібри бетону $\varepsilon_{cm} = \varepsilon_{cu}$ (їх рівень $\eta_m = \eta_u$).

Для виведення шуканих залежностей, з метою обчислення за ними значень M_{Rd} та ε_{cu} , для прийнятої розрахункової схеми (рис. 1) використані:

– рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0; \quad N_s - N_c = 0, \quad (1)$$

$$\sum M_Z = 0; \quad M_{Ed} - N_c (d - x + y_{Nc}) = 0, \quad (2)$$

– діаграма «напруження-деформації» фізичного стану бетону на стиск за [1] у вигляді

$$\sigma_c = \frac{f_{cd} (k\eta - \eta^2)}{(1 + (k - 2)\eta)}, \quad (3)$$

де $k = 1,05(E_{cd} \varepsilon_{c1,cd} / f_{cd})$, $\eta = (\varepsilon_c / \varepsilon_{c1,cd})$;

– умова сумісності деформування бетону й арматури у вигляді:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s; \quad (4)$$

– гіпотеза плоских перерізів за умовою:

$$\frac{\varepsilon_{cm}}{x} = \frac{\varepsilon_s}{d - x}; \quad (5)$$

– діаграма «напруження-деформації» роботи арматури з фізичною ділянкою текучості за залежностями:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad \text{при } 0 \leq \varepsilon_s \leq f_{yd} / E_s; \quad (6)$$

$$\sigma_s = f_{yd} \quad \text{при } \varepsilon_s > f_{yd} / E_s. \quad (7)$$

Оскільки, як відомо, втрата несучої здатності переармованих елементів починається із руйнування бетону стиснутої зони, то є очевидним, що критерієм руйнування таких елементів буде досягнення бетоном їх стиснутої зони максимального опору. Сформульоване твердження можна представити у вигляді умов:

$$N_{cu}(\varepsilon_{cu}) = \max N_c(\varepsilon_{cm}), \quad (8)$$

або

$$N_{cu}(\eta_u) = \max N_c(\eta_m), \quad (9)$$

в яких граничне значення відносної деформації бетону на стиск ε_{cu} (або її рівень $\varepsilon_{cu} / \varepsilon_{c1,cd} = \eta_u$), в найбільш деформованій фібри поперечного перерізу, перевищує деформації, що відповідають екстремальному критерію міцності цього перерізу в балці при сталому значенні напружень текучості в арматурі [7].

Із сформульованих критеріїв (8) – (9) випливає, що, залежність для визначення невідомої величини ε_{cu} , можна отримати шляхом дослідження

на екстремум функції $N_c = f(\sigma_c, x, \eta_m, \dots)$. Тобто, в основу шуканої залежності покладено критерій, який являє собою явище виникнення максимального внутрішнього силового опору бетону стиснутої зони перерізу при одночасному зростанні напружень у поздовжній арматурі.

Для отримання шуканої залежності з визначення невідомої величини ε_{cu} (або η_u) шляхом диференціювання функції N_c від змінної η_m у вигляді $N_c = f(\sigma_c, x, \eta_m, \dots)$, спочатку N_c у рівнянні (1) функціонально було виражено через x, η_m .

Поставлена мета реалізована на основі отриманого закону розподілення напружень в бетоні стиснутої зони у вигляді $\sigma_c = f(y, \eta_m, \dots)$ в системі координат $Y_c O_c X_c$ з її початком O_c на нейтральній лінії (рис. 1) у наступному вигляді:

$$\sigma_c = \frac{f_{cd} \eta_m y (kx - \eta_m y)}{x(x + (k - 2)\eta_m y)}. \quad (10)$$

Особливість закону (10) полягає в тому, що він описує процес розподілення напружень в бетоні стиснутої зони по поперечному перерізові елемента за будь-якого рівня відносних деформацій бетону в найбільш стиснутій фібрі, і, таким чином, для будь-якого рівня завантаження балкового елемента. За залежністю (10) складові рівнянь (1) та (2), після виконання необхідних математичних дій, перетворені у такі вирази:

$$N_c = b \int_0^x \frac{f_{cd} \eta_m y (kx - \eta_m y)}{x(x + (k - 2)\eta_m y)} dy = f_{cd} b x \omega, \quad (11)$$

$$y_{N_c} = \frac{S_c}{N_c} = x \frac{\varphi}{\omega}; \quad (12)$$

$$S_c = b \int_0^x \frac{f_{cd} \eta_m y (kx - \eta_m y) y}{x(x + (k - 2)\eta_m y)} dy = f_{cd} b x^2 \varphi, \quad (13)$$

У виразах (11) та (13)

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{(k-1)^2 (c - \ln c - 1)}{(k-2)^3 \eta_m} - \frac{\eta_m}{2(k-2)} \text{ at } k \neq 2, \\ \omega &= \eta_m \left(1 - \frac{\eta_m}{3}\right) \text{ at } k = 2, \end{aligned} \right\}; \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{(k-1)^2 \left((c-2)^2 + 2 \ln c - 1 \right)}{2(k-2)^4 \eta_m^2} - \frac{\eta_m}{3(k-2)} \quad \text{at } k \neq 2, \\ \varphi &= \eta_m \left(\frac{2}{3} - \frac{\eta_m}{4} \right) \quad \text{at } k = 2, \end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

де ω – як видно з формули (11), це коефіцієнт повноти епюри напружень у бетоні стиснутої зони;

$$c = 1 + (k-2)\eta_m.$$

Опираючись на критерій (9) для визначення значень ε_{cu} (η_u) відповідне рівняння (11) досліджено на екстремум за умовою

$$\frac{\partial N_c}{\partial \eta_m} = 0. \quad (16)$$

Зокрема, наприклад, для значення $k = 2$ похідна функції (11) за (16) має вигляд

$$\frac{\partial N_c}{\partial \eta_m} = f_{cd} b x \left(1 - \frac{2\eta_m}{3} \right). \quad (17)$$

На основі розв'язання (17) за умовою (16) отримано, що для $k = 2$ відповідно $\eta_u = 1,5$.

Графічно результати дослідження функції (11) на екстремум за умовою (16) представлено діаграмою граничних (характерних) значень рівнів фібрових деформацій (конструкційних деформацій) стиску бетону в момент втрати переармованим залізобетонним елементом несучої здатності (рис. 2).

Після підстановки функціонально виражених через η_u величин N_c та u_{Nc} в рівняннях рівноваги (1) та (2) з урахуванням роботи арматури за умовою (6) на похилій ділянці дволінійної діаграми деформування отримано, що

$$\sigma_s A_s = f_{cd} b x \omega, \quad (18)$$

$$M_{Ed} - \sigma_s A_s \left(d - \chi \frac{\sigma_s A_s}{f_{cd} b} \right) = 0, \quad (19)$$

де коефіцієнт χ показує, яку частину висоти стиснутої зони x складає уздовж цієї висоти відстань від найбільш стиснутої фібри поперечного перерізу до точки прикладання рівнодійної N_c :

$$\chi = (\omega - \varphi) / \omega^2. \quad (19)$$

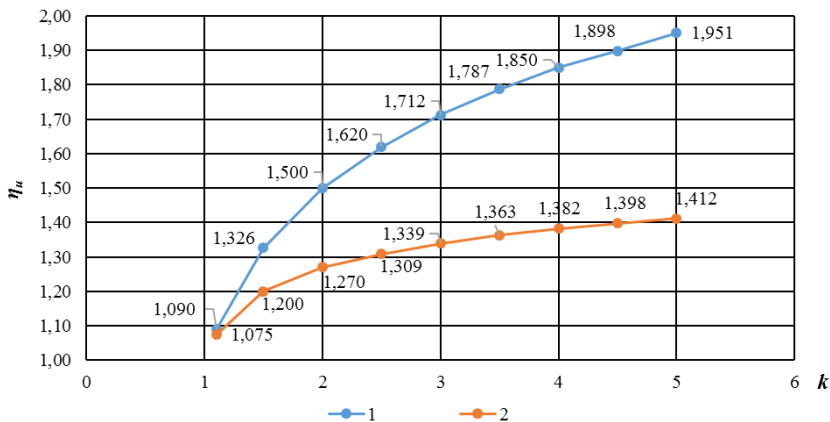


Рис. 2. Діаграми граничних значень рівнів фібрових деформацій бетону η_u у стиснутій зоні поперечного перерізу згинального 1 – перearмованого за (9) та 2 – нормально армованого за [7] залізобетонних елементів залежно від параметра k

Для зручності застосування параметрів ω та χ в розрахунках міцності перearмованих залізобетонних елементів їх значення, обчислені за залежностями (14) та (15) з урахуванням даних графіка 1 на рисунку 2, зведені у таблицю 1 залежно від класу бетону С.

Таблиця 1

Значення параметрів η_u , ω та χ для перearмованих елементів

Клас бетону	С 12/15	С 16/20	С 20/25	С 25/30	С 30/35	С 32/40	С 35/45	С 40/50	С 45/55	С 50/60
η_u	1,742	1,706	1,668	1,642	1,620	1,595	1,578	1,565	1,543	1,518
ω	0,820	0,811	0,801	0,794	0,788	0,781	0,775	0,771	0,764	0,756
χ	0,541	0,543	0,600	0,547	0,548	0,549	0,551	0,552	0,553	0,555

Розглянемо застосування запропонованої методики на прикладі.

Приклад. Дано: балка прямокутного профілю з розмірами перерізу $b = 200$ мм, $h = 400$ мм; бетон балки класу С30/35 ($f_{cd} = 19,5$ МПа, $E_{cd} = 27$ ГПа, $\epsilon_{c1,cd} = 1,70\%$); арматура класу А500С ($f_{yd} = 417$ МПа, $E_s = 210$ ГПа) розташована на відстані від нижньої грані перерізу $a = 50$ мм, площа арматури $A_s = 1885$ мм². Для розглядуваної балки за методикою [9] встановлено, що в момент руйнування розтягнута арматура не досягає межі текучості.

Необхідно визначити згинальний момент, який може сприймати балка.

Робоча висота перерізу $d = h - a = 400 - 50 = 350$ мм.

Визначаємо висоту стиснутої зони бетону з рівняння (17) при $\eta_u = 1,620$ та $\omega = 0,787$ (табл. 1). Отримано $x = 217,19$ мм. Згинальний момент визначаємо з рівняння (18) при $\sigma_s = 353,65$ МПа та $\chi = 0,548$ (табл. 1) $M_{Rd} = 171,0$ кНм.

Значення згинального моменту, обчислене ітераційним методом за [2] з використанням апроксимації діаграми стану бетону поліномом 5-го ступеня, складає $M_{Rd} = 177,0$ кНм.

Результати досліджень. У наведеній роботі продемонстровано, що розрахунок міцності (несучої здатності) згинальних залізобетонних елементів у нормальному перерізі при роботі розтягнутої арматури в пружній стадії можна здійснювати шляхом застосування запропонованого критерію повного використання опору бетону стиснутої зони (8)–(9). Однозначність сформульованого критерію обґрунтовано фізичними передумовами, регламентованими чинними нормативними документами. Сумісне застосування екстремального критерію [9] та критерію повного використання опору бетону стиснутої зони в розрахунках несучої здатності в нормальному перерізі згинальних залізобетонних елементів, реалізується в замкнутій формі. Критерій (8)–(9) можна також застосовувати для обчислення граничних значень фібрових деформацій бетону при визначенні несучої здатності позацентровано стиснутих елементів з малими ексцентриситетами, розтягнута арматура котрих працює у пружній стадії.

Аналіз отриманих у цій роботі формул (11), (8) та (9) показує, що числові значення фібрових деформацій бетону функціонально залежать безпосередньо від форми стиснутої зони, що на практиці означає їх залежність від форми поперечного перерізу залізобетонного елемента. Отримані і наведені розрахункові значення фібрових деформацій (табл. 1) є прийнятними для бетону прямокутної форми стиснутої зони перерізу. Як свідчать результати роботи багатьох дослідників, зокрема роботи [6, 9], при перетворенні прямокутної форми стиснутої зони в трикутну чи трапецієподібну при повороті поперечного перерізу (за умов косоного стискання чи згинання), значення граничних фібрових деформацій концентруються на рівні найбільш стиснутого ребра елемента, тобто вони зростають. Такі значення деформацій для умов складного деформування отримані аналітично на основі екстремального критерію міцності для випадку досягнення розтягнутою арматурою межі текучості [7]. Що ж

стосується використання запропонованого критерію (8) – (9) у випадку інших форм стиснутої зони (поперечних перерізів), за умови, що деформації розтягнутої арматури розглядаються для переармованих залізобетонних елементів, то такі дослідження також проведені в «Полтавській політехніці», що дає можливість використовувати повний діапазон змін граничних значень фібрових деформацій бетону як для прямокутної, так і інших форм стиснутої зони бетону (поперечних перерізів). Тобто, в кінцевому підсумку отримано діаграми граничних значень фібрових деформацій бетону залежно від форми поперечного перерізу елементів і, як наслідок, уможливлено розрахунок переармованих залізобетонних елементів за викладеною у цій статті методикою не тільки при їх плоскому згинанні, але й складному деформуванні (при косому стисканні, косому згинанні, згинанні з крученням та інших завантаженнях).

Висновки. В роботі сформульовано критерій для обчислення граничних значень деформацій бетону стиснутої зони у складі переармованих залізобетонних елементів, в котрих напруження розтягнутої арматури в момент руйнування не є сталим значенням. Цей критерій у сукупності з екстремальним критерієм опору бетону стиснутої зони може бути покладено в основу методики розрахунку міцності (несучої здатності) залізобетонних конструкцій. Його застосування є можливим як для згинальних елементів з переармованим перерізом, так і позацентрово стиснутих елементів, елементів з високоміцною арматурою. Виведені залежності дозволяють розрахувати граничні значення фібрових деформацій бетону залежно від будь-яких факторів. Отриману діаграму значень можна використовувати для систематизації граничних значень деформацій бетону залежно від різних класів бетону. На основі деформаційної моделі виведені формули для розрахунку міцності переармованих залізобетонних елементів з використанням обчислених граничних деформацій бетону.

References

1. DBN V.2.6-98:2009. Konstruktsii budynkiv i sporud. Betonni ta zalizobetonni konstruktsii. Osnovni polozhennia. K.: Minrehionbud Ukrainy, 2022. 71 s.
2. DSTU B V.2.6-156:2010. Konstruktsii budynkiv i sporud. Betonni ta zalizobetonni konstruktsii z vazhkohto betonu. Pravyla proektuvannia. K.: Minrehionbud Ukrainy, 2011. 118.
3. Grammatikou S., Biskinis D., Fardis M.N. Ultimate Strain Criteria for RC Members in Monotonic or Cyclic Flexure. Journal of Structural Engineering, 2016. Vol.

142, No. 9. URL: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0001501](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0001501)

4. Baduge Sh.K., Mendis P., Ngo T. Stress-strain relationship for very-high strength concrete (>100 MPa) confined by lateral reinforcement. *Engineering Structures*, 2018. Vol. 177, P. 795-808. URL: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.08.008>

5. Rüsç H. Researches toward a general flexural theory for structural concrete. *Journal of the American Concrete Institute*, 1960. Vol.32, No.1, P. 1-28, 1960.

6. Mytrofanov V.P., Pavlikov A.M. Ekstremalniy kryterii mitsnosti zalizobetonnykh elementiv u deformatsiynii modeli. *Budivelni konstruktsii. Naukovo-tekhnichni problemy suchasnoho zalizobetonu: Zb. nauk. pr., 2005. Vyp. 62. Kn. 1. S. 205-212.*

7. Pavlikov A., Harkava O. Structural deformability of concrete. *Concrete Structures for Resilient Society: Proceedings of the fib Symposium, 2020. P. 519-525.*

8. Pavlikov A., Harkava O., Atembemoh K. Design of Reinforced Concrete Members Taking into Account the Influence of Biaxial Bending. *Proceedings of the 3rd International Conference on Building Innovations. ICBI 2020, Lecture Notes in Civil Engineering, Springer, 2021. Vol. 181, P. 291-301. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-85043-2_28*

9. Wu Y.-F., Cao Yu. Energy Balance Method for Modeling Ultimate Strain of Confined Concrete. *ACI Structural Journal*, 2017. Vol. 114, No. 2, P. 373-381. URL: <https://doi.org/10.14359/51689429>

10. Tijani I.A., Wu Y.-F., Lim C.W. Energy balance method for modelling ultimate strain of fiber-reinforced polymer-repaired concrete. *Structural Concrete*, 2020. Vol. 21, P. 804-820. URL: <https://doi.org/10.1002/suco.201900260>

11. Samani A.K., Attard M.M. A stress-strain model for uniaxial and confined concrete under compression. *Engineering Structures*, 2012. Vol. 41, P. 335-349. URL: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.03.027>

12. Pour A.F., Faradonbeh R. Sh., Gholampour A., Ngo Tuan D. Predicting ultimate condition and transition point on axial stress-strain curve of FRP-confined concrete using a meta-heuristic algorithm. *Composite Structures*, 2023. Vol. 304, part 2. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116387>

Література

1. ДБН В.2.6-98:2009. Конструкції будинків і споруд. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення. К.: Мінрегіонбуд України, 2022. 71 с.

2. ДСТУ Б В.2.6-156:2010. Конструкції будинків і споруд. Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. Правила проектування. К.: Мінрегіонбуд України, 2011. 118.

3. Grammatikou S., Biskinis D., Fardis M.N. Ultimate Strain Criteria for RC Members in Monotonic or Cyclic Flexure. *Journal of Structural Engineering*, 2016. Vol. 142, No. 9. URL: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0001501](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0001501)

4. Baduge Sh.K., Mendis P., Ngo T. Stress-strain relationship for very-high strength concrete (>100 MPa) confined by lateral reinforcement. *Engineering Structures*, 2018. Vol. 177, P. 795-808. URL: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.08.008>
5. Rüsç H. Researches toward a general flexural theory for structural concrete. *Journal of the American Concrete Institute*, 1960. Vol.32, No.1, P. 1-28, 1960.
6. Митрофанов В.П., Павліков А.М. Екстремальний критерій міцності залізобетонних елементів у деформаційній моделі. Будівельні конструкції. Науково-технічні проблеми сучасного залізобетону: Зб. наук. пр., 2005. Вип. 62. Кн. 1. С.205-212.
7. Pavlikov A., Harkava O. Structural deformability of concrete. *Concrete Structures for Resilient Society: Proceedings of the fib Symposium*, 2020. P. 519-525.
8. Pavlikov A., Harkava O., Atembemoh K. Design of Reinforced Concrete Members Taking into Account the Influence of Biaxial Bending. *Proceedings of the 3rd International Conference on Building Innovations. ICBI 2020, Lecture Notes in Civil Engineering*, Springer, 2021. Vol. 181, P. 291-301. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-85043-2_28
9. Wu Y.-F., Cao Yu. Energy Balance Method for Modeling Ultimate Strain of Confined Concrete. *ACI Structural Journal*, 2017. Vol. 114, No. 2, P. 373-381. URL: <https://doi.org/10.14359/51689429>
10. Tijani I.A., Wu Y.-F., Lim C.W. Energy balance method for modelling ultimate strain of fiber-reinforced polymer-repaired concrete. *Structural Concrete*, 2020. Vol. 21, P. 804-820. URL: <https://doi.org/10.1002/suco.201900260>
11. Samani A.K., Attard M.M. A stress-strain model for uniaxial and confined concrete under compression. *Engineering Structures*, 2012. Vol. 41, P. 335-349. URL: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.03.027>
12. Pour A.F., Faradonbeh R. Sh., Gholampour A., Ngo Tuan D. Predicting ultimate condition and transition point on axial stress-strain curve of FRP-confined concrete using a meta-heuristic algorithm. *Composite Structures*, 2023. Vol. 304, part 2. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116387>